Banco de Questões 2011

Conteúdo

Apresentação

Desde da sua primeira edição em 2005, a OBMEP oferece a todas as escolas públicas do país um *Banco de Questões* com problemas e desafios de matemática para alunos e professores.

O Banco de Questões apresenta alguns problemas de matemática originais e outros retirados de Olimpíadas nacionais e internacionais passadas. Ele pretende despertar o prazer pela matemática, estimular o aluno interessado com perguntas instigantes e proporcionar um treinamento para as provas da OBMEP.

Esta nova edição, obra dos professores Paulo Rodrigues, Robério Bacelar e Fábio Brochero, tem um novo formato voltado para a segunda fase e propõe 100 problemas e 20 desafios divididos por nível e por assunto. Ao final são propostos, sem resolução, mais 30 desafios.

Percorrendo, ao final do livro, a origem dos problemas, o leitor poderá constatar que esta edição traz questões de um grau de dificuldade similar ao das olimpíadas internacionais. Sugerimos portanto ao aluno e ao professor começar com os problemas das edições anteriores do Banco de Questões, em regra geral mais simples, e somente depois tentar resolver os problemas desta edição, sem nunca desanimar se a solução não vier imediatamente, lembrando que alguns problemas de matemática famosos levaram alguns séculos para serem resolvidos, e outros ainda não o foram até hoje.

Se você, leitor(a), encontrar uma solução para algum problema diferente da solução apresentada ao final do Banco de Questões, envie para **bancodequestoes@obmep.org.br**.

Boa diversão,

Claudio Landim
Coordenador Geral da OBMEP

Este banco é dedicado a todos os professores de matemática, que no seu dia a dia, têm procurado superar cada desafio, mostrando aos seus alunos que existem soluções para cada problema.

Enunciados dos Problemas

Nível 1

1. Aritmética

Nível 1 | Enunciados

1 | Múltiplo de 9 com Algarismos Pares

Encontre o menor múltiplo de 9 que não possui algarismos ímpares. (p. 75)

2 | Guardando Cubos

Uma caixa possui o formato de um bloco retangular de dimensões 102 cm, 255 cm e 170 cm. Queremos guardar nessa caixa a menor quantidade possível de pequenos cubos de aresta inteira, de forma a ocupar toda a caixa.

(a) Qual a medida da aresta de cada bloco?

(b) Quantos blocos serão necessários?

(p. 75)

3 | Calculadora Quebrada

Tio Mané tem uma calculadora quebrada que não tem a tecla $\boxed{0}$ e no visor nunca aparece 0 depois de alguma operação. Assim, por exemplo, se ele multiplica 3×67, obtém como resposta 21, ao invés de 201. Tio Mané multiplicou dois números de dois algarismos em sua calculadora e obteve no visor o número 11. Quais são os possíveis números que ele multiplicou? (p. 76)

4 | Loja em Quixajuba

Uma loja em Quixajuba só vende artigos com preços de R\$ $0,99$, R\$ $1,99$, R\$ $2,99$, e assim sucessivamente. Tio Mané realizou uma compra no valor total de R\$ $125,74$. Quantos artigos ele pode ter comprado? (p. 76)

5 | Números Sortudos

Dizemos que um número natural é sortudo se todos os seus dígitos são iguais a 7. Por exemplo, 7 e 7777 são sortudos, mas 767 não é. João escreveu num papel os vinte primeiros números sortudos começando pelo 7, e depois somou-os. Qual o resto da divisão dessa soma por 1000? (p. 77)

6 | Somando Idades

Cada pessoa de um grupo de dez pessoas calcula a soma das idades das outras nove integrantes do grupo. As dez somas obtidas foram 82, 83, 84, 85, 87, 89, 90, 90, 91 e 92.
Determine a idade da pessoa mais jovem. (p. 77)

7 | Menor Soma Positiva

O produto de 50 números inteiros consecutivos é zero e a soma desses números é positiva. Qual o menor valor que pode assumir essa soma? (p. 77)

8 | Média dos Algarismos

Paulinho escreveu um número no quadro e depois inventou a seguinte brincadeira: escolhe dois algarismos do número que sejam ambos pares ou ambos ímpares e troca cada um deles pela sua média aritmética. Ele repete este processo quantas vezes quiser, desde que o número disponha de dois algarismos com a mesma paridade. Por exemplo, ele escreveu o número 1368 e obteve a sequência na qual foram destacados os algarismos que serão trocados no passo seguinte.

$$1\ 3\ 6\ 8 \longrightarrow 1\ 3\ 7\ 7 \longrightarrow 4\ 3\ 4\ 7 \longrightarrow 4\ 5\ 4\ 5$$

(a) Com esta brincadeira, é possível obter o número 434434 a partir do número 324561?

(b) Paulinho escreveu o número 123456789 no quadro. Mostrar que com este processo, selecionando os números adequadamente, ele pode obter um número maior que 800000000.

(p. 78)

9 | Sequência Numérica I

Todo termo de uma sequência, a partir do segundo, é igual à soma do anterior com a soma de seus algarismos. Os primeiros elementos da sequência são

$$1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, 38, 49, \ldots$$

É possível que 793210041 pertença a essa sequência? (p. 78)

10 | Estrelas em Geometrix

Estrelix, um habitante de Geometrix, decidiu colocar os inteiros positivos seguindo a disposição indicada na figura.

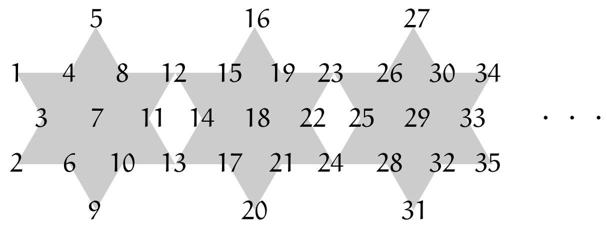


Figura 10.1

Em quais estrelas aparece o número 2011? Posicione todos os números que aparecem nas referidas estrelas. (p. 79)

11 | Bandeira do Tio Mané

O Tio Mané é torcedor doente do Coco da Selva Futebol Clube e resolveu fazer uma bandeira para apoiar seu time no jogo contra o Desportivo Quixajuba. Para isso, comprou um tecido branco retangular com 100 cm de largura e 60 cm de altura. Dividiu dois de seus lados em 5 partes iguais e os outros dois em 3 partes iguais, marcou o centro do retângulo e pintou o tecido da forma indicada na figura 11.1.

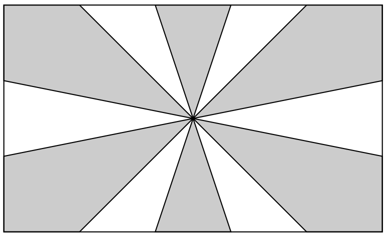


Figura 11.1

Qual é a área do tecido que Tio Mané pintou? (p. 81)

12 | Abelha na Flor

As flores de Geometrix têm formatos muito interessantes. Algumas delas possuem a forma mostrada na figura 12.1, na qual há seis quadrados e doze triângulos equiláteros.

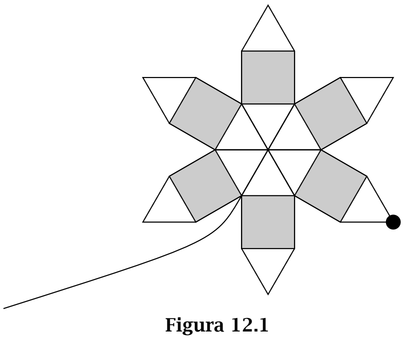


Figura 12.1

Uma abelha pousou no ponto destacado e andou sobre a borda da flor no sentido horário até voltar ao ponto inicial. Sabendo que a região cinza tem 24 cm^2 de área, qual é a distância percorrida pela abelha? (p. 82)

13 | Ângulo da Asa Delta

Na figura 13.1, temos dois triângulos, ABC e ADC tais que $AB = AD$ e $CB = CD = CA$. Sabendo que $C\hat{B}A = 25°$, determine a medida do ângulo $B\hat{C}D$.

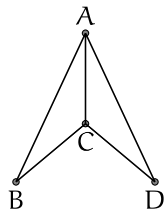


Figura 13.1

(p. 82)

14 | Azulejos de Pedro

Pedro é um pedreiro. Ele tem um grande número de azulejos de três tipos, como mostrado abaixo:

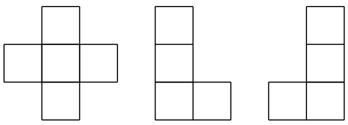


Figura 14.1

O menor lado de cada azulejo mede 10 cm. Ele quer ladrilhar completamente uma bancada de uma cozinha sem cortar qualquer azulejo.

(a) Mostre como ele poderá alcançar seu objetivo se a bancada for um retângulo 60 cm $\times$ 50 cm.

(b) Mostre como ele poderá alcançar seu objetivo se a bancada for um quadrado 60 cm $\times$ 60 cm.

(p. 83)

15 | Retângulo 9 x 4

(a) Divida um retângulo 9×4 em três peças e remonte-as de modo a formar um quadrado 6×6.

(b) Divida um retângulo 9×4 em duas peças e remonte-as de modo a formar um quadrado 6×6.

(p. 83)

16 | Plantando Jasmins

O jardineiro Jacinto decidiu ajardinar um canteiro retangular com 10 m^2 de área. Dividiu o canteiro traçando uma diagonal e unindo cada um dos pontos médios dos lados maiores com um vértice do lado oposto, como indicado na figura.

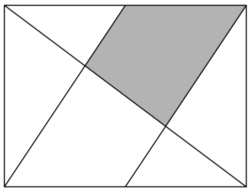


Figura 16.1

Na região sombreada plantou jasmins. Qual a área dessa região? (p. 84)

17 | Tangram

A figura 17.2 é um retângulo cuja área sombreada foi feita utilizando peças de um *tangram* que formam um quadrado de 10 cm^2 de área, mostrado na figura 17.1.

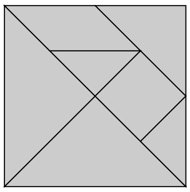


Figura 17.1

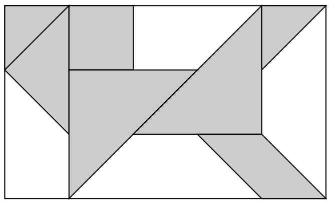


Figura 17.2

Qual é a área do retângulo? (p. 84)

18 | Triângulo Isósceles I

Seja ABC um triângulo com $B\hat{A}C = 30°$ e $A\hat{B}C = 50°$. A reta ℓ corta os lados AB, BC e o prolongamento de AC em D, E e F, respectivamente.

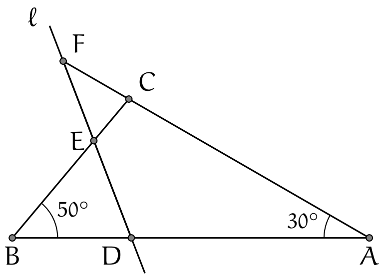


Figura 18.1

Se o triângulo BDE é isósceles, quais são as três possíveis medidas para o ângulo $C\hat{F}E$? (p. 85)

19 | Formando um Retângulo

A partir de seis retângulos iguais e cinco quadrados iguais é formado um retângulo de perímetro 324 cm, como mostrado na figura 19.1

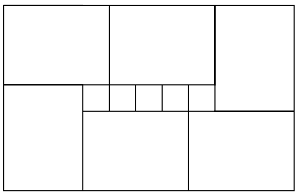


Figura 19.1

Determine a área do retângulo construído. (p. 86)

20 | Construindo uma Pipa

Para construir a pipa de papel representada na figura, Eduardo começou por pintar um retângulo $ABCD$ numa folha de papel. Em seguida, prolongou cada um dos lados do retângulo triplicando o seu comprimento e obteve o quadrilátero $A'B'C'D'$.

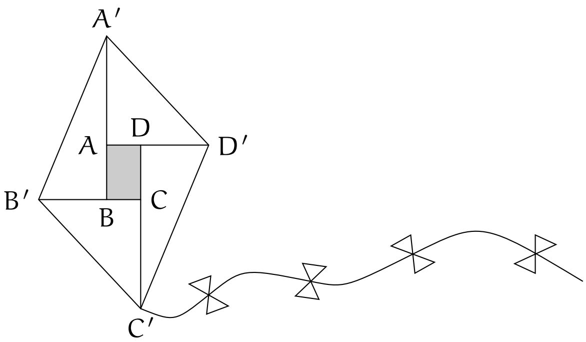


Figura 20.1

Sabendo que a área do retângulo $ABCD$ é $200\ \text{cm}^2$, qual é a área da pipa construída por Eduardo? (p. 87)

21 | Colorindo Mapas

No mapa da figura 21.1 a curva XY é uma das fronteiras. Países como I e II têm fronteira comum. O ponto Y não é considerado fronteira, ou seja, países como I e V não têm fronteira comum. Você deve colorir o mapa fazendo países de fronteira comum terem cores diferentes.

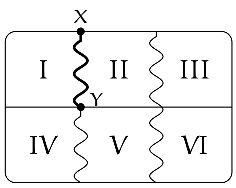


Figura 21.1

(a) Qual é o número mínimo de cores para colorir o mapa? Mostre como colori-lo.

(b) Desenhe outro mapa de 6 países, que precise de pelo menos 4 cores para ser pintado. Mostre como colori-lo com cores A, B, C e D.

(p. 89)

22 | De Coco da Selva a Quixajuba

As cidades de *Coco da Selva* e *Quixajuba* estão ligadas por uma linha de ônibus. De Coco da Selva saem ônibus para Quixajuba de hora em hora e o primeiro parte à meia-noite em ponto. De Quixajuba saem ônibus para Coco da Selva de hora em hora e o primeiro parte à meia-noite e meia em ponto. A viagem de ônibus é feita em exatamente 5 horas.
Se um ônibus sai de Coco da Selva ao meio-dia, quantos ônibus vindo de Quixajuba ele encontra durante o percurso? (p. 89)

23 | O Baralho de João

João possui um baralho com 52 cartas numeradas de 1 até 52. Um conjunto de três cartas é chamado *sortudo* se a soma dos algarismos em cada carta é a mesma. Qual é o número mínimo de cartas que João tem de pegar do baralho, sem olhar, de tal forma que entre as cartas que ele pegou necessariamente existam três cartas que formam um conjunto de cartas sortudo? (p. 90)

24 | Moedas e Pesagens

Ana possui 48 moedas aparentemente iguais. Porém, exatamente uma das moedas é falsa e tem peso diferente do peso das outras. Ela possui uma balança eletrônica que mede o peso total de qualquer quantidade de moedas. Mostre como ela pode determinar a moeda falsa realizando sete pesagens.(p. 90)

25 | Distribuindo Maçãs

Noventa e nove maçãs são distribuídas entre alguns garotos de tal forma que todos recebem quantidades diferentes de maçãs.

(a) Qual o número máximo de garotos que pode haver nesse grupo?

(b) Havendo dez garotos, qual o número máximo de maçãs que recebe o garoto que ganhou menos maçãs?

(p. 91)

26 | Maria e seus Convidados

Maria convidou nove garotos e oito garotas para sua festa de aniversário. Ela preparou camisetas com os números de 1 a 18, ficou com a de número 1 e distribuiu as demais para seus convidados. Durante uma dança, ela observou que a soma dos números de cada casal era um quadrado perfeito. Quais pares estavam dançando? (p. 91)

27 | Cartões de Apostas

Três apostadores A, B e C preenchem individualmente um cartão de apostas, dos possíveis resultados de cinco jogos de futebol (C = vitória do time da casa, E = empate, V = vitória do visitante). Os cartões preenchidos foram:

	C	E	V
1	×		
2	×		
3		×	
4		×	
5			×

Apostador A

	C	E	V
1			×
2		×	
3	×		
4		×	
5	×		

Apostador B

	C	E	V
1	×		
2	×		
3			×
4	×		
5		×	

Apostador C

Finalizadas as partidas, observou-se que A obteve três acertos, B obteve três acertos e C obteve dois acertos. Construa um cartão com cinco acertos. (p. 92)

28 | Números de 1 a 16

(a) Mostre que os números de 1 a 16 podem ser escritos numa reta, de tal modo que a soma de quaisquer dois números vizinhos seja um quadrado perfeito.

(b) Mostre que os números de 1 a 16 não podem ser escritos ao redor de uma circunferência, de tal modo que a soma de quaisquer dois números vizinhos seja um quadrado perfeito.

(p. 92)

29 | Calculando Somas

Considere um tabuleiro com 11 linhas e 11 colunas.

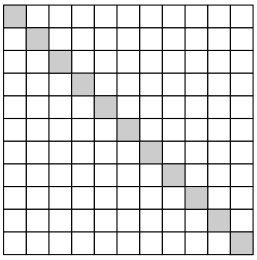


Figura 29.1

(a) Quantas casas formam este tabuleiro?

(b) A diagonal cujas casas estão sombreadas separa o tabuleiro em duas regiões: uma acima e outra abaixo. Quantas casas formam cada região? É possível calcular esse número sem contar casa por casa?

(c) Com a ajuda do tabuleiro, é possível calcular a soma $1 + 2 + \cdots + 10$. Explique como.

(d) Com a ajuda de outro tabuleiro, com o raciocínio semelhante ao do item anterior, é possível calcular a soma $1 + 2 + \cdots + 100$. Qual deve ser a quantidade de linhas e colunas do tabuleiro? Qual o valor da soma?

(p. 93)

30 | Herança para Cinco Filhos

Divida a figura 30.1 em cinco partes do mesmo formato e com áreas iguais de tal modo que cada parte contenha exatamente um quadrado cinza.

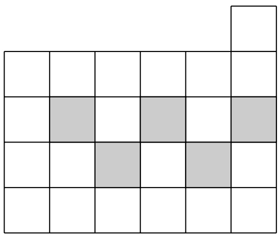


Figura 30.1

(p. 94)

4. Desafios

Nível 1 | Enunciados

31 | Vizinhos e Distantes

É possível escrever os números naturais de 1 a 100 sobre uma reta de modo que a diferença entre quaisquer dois números vizinhos seja maior ou igual a 50? (p. 95)

32 | Truque com Cartas

Um mágico com os olhos vendados dá 29 cartas numeradas de 1 a 29 para uma mulher da plateia. Ela esconde duas cartas no bolso e devolve as restantes para a assistente do mágico.
A assistente escolhe duas cartas dentre as 27 e um homem da plateia lê, na ordem que quiser, o número destas cartas para o mágico. Após isto, o mágico adivinha o número das cartas que foram escondidas pela mulher.
Como o mágico e sua assistente podem combinar uma estratégia para realizarem esse truque? (p. 95)

33 | Campeonato de Quixajuba

A tabela mostra a classificação final do campeonato de futebol de Quixajuba. Neste campeonato cada time jogou com cada um dos outros **quatro** vezes. Cada time ganha 3 pontos por vitória, 1 por empate e não ganha pontos em caso de derrota.

Equipe	**Pontos**
Bissetriz	22
Primo	19
Potência	14
MDC	12

(a) Quantas partidas foram disputadas no campeonato?

(b) Quantas partidas terminaram empatadas?

(p. 96)

34 | Tabuleiro 6 x 6

Você dispõe de doze peças em formato de L, como a mostrada na figura 34.1. Cada figura é formada por três quadrados de lado 1. Mostre como cobrir um quadrado 6×6 com essas peças, de modo que nenhum retângulo 2×3 seja formado por exatamente duas de tais peças.

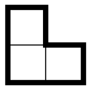


Figura 34.1

(p. 96)

35 | Somando Algarismos

Quantos números naturais de três algarismos são tais que a soma destes é igual a 24? (p. 97)

36 | Contando Quadrados

Doze pontos são marcados sobre uma grade de pontos, como mostrado na figura 36.1.

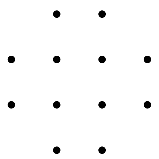


Figura 36.1

Quantos quadrados podem ser formados ligando quatro desses pontos? (p. 97)

37 | A Moeda Falsa

Temos 25 moedas aparentemente iguais, mas sabemos que exatamente uma delas é falsa e tem o peso diferente do peso das outras.
Não sabemos qual é a moeda falsa. Todas as outras 24 moedas possuem o mesmo peso.
Queremos determinar, utilizando uma balança de pratos, se a moeda falsa é mais leve ou mais pesada que as outras.
Como podemos alcançar este objetivo realizando **duas pesagens** em uma balança de pratos?

- Não queremos encontrar a moeda falsa. Queremos saber se ela é mais leve ou mais pesada que as outras.
- Nesse tipo de balança podemos comparar os pesos colocados nos dois pratos, ou seja, a balança pode equilibrar ou pender para o lado mais pesado.

(p. 98)

38 | O Tabuleiro Mutilado

A figura abaixo mostra um tabuleiro 8×8 no qual duas casas foram retiradas (a do canto inferior direito e a do canto superior esquerdo). É possível cobrir este tabuleiro com 31 dominós 2×1? Cada dominó pode ser colocado na horizontal ou na vertical cobrindo exatamente duas casas.

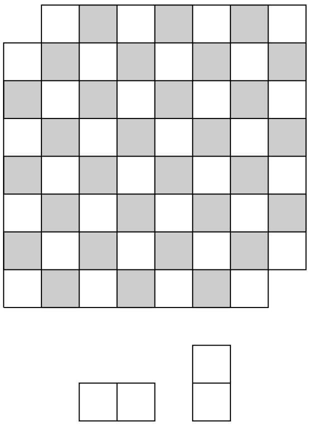


Figura 38.1

(p. 98)

39 | Dividindo um Retângulo

(a) É possível dividir um retângulo 39×55 em retângulos 5×11?

(b) É possível dividir um retângulo 55×27 em retângulos 5×11?

(p. 99)

40 | Números no Tabuleiro 4 x 4

Guilherme escreveu 0 ou 1 em cada casa de um tabuleiro 4×4. Ele colocou os números de modo que a soma dos números das casas vizinhas de cada casa do tabuleiro fosse igual a 1.
Por exemplo, na figura 40.1, considerando a casa marcada com ●, a soma dos números das casas sombreadas é igual a 1.

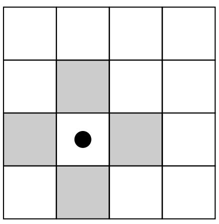


Figura 40.1

Determine a soma de todos os 16 números do tabuleiro.

(p. 100)

Nível 2

5. Aritmética e Álgebra

Nível 2 | Enunciados

41 | Múltiplo de 36

Determine o maior múltiplo de 36 que possui todos os algarismos pares e diferentes. (p. 103)

42 | Quem é maior?

Sejam

$$R = 3 \times 9 + 4 \times 10 + 5 \times 11 + \cdots + 2003 \times 2009.$$

e

$$S = 1 \times 11 + 2 \times 12 + 3 \times 13 + \cdots + 2001 \times 2011$$

(a) Qual é o maior número: R ou S?

(b) Calcule a diferença entre o maior e o menor.

(p. 103)

43 | Resto da Divisão

Um número n de dois algarismos é dividido pela soma de seus algarismos, obtendo resto r.

(a) Encontre um número n tal que $r = 0$.

(b) Mostre que r não pode ser maior que 15.

(c) Mostre que para qualquer r menor ou igual a 12, existe um n que deixa resto r ao dividi-lo pela soma de seus algarismos.

(p. 104)

44 | Soma de Consecutivos

(a) A soma de **quatro** inteiros positivos consecutivos pode ser um número primo? Justifique sua resposta.

(b) A soma de **três** inteiros positivos consecutivos pode ser um número primo? Justifique sua resposta.

(p. 104)

45 | Quadrado Perfeito

Observe que

$$\begin{aligned} 1^2+2^2+(1\times 2)^2 &= 3^2\\ 2^2+3^2+(2\times 3)^2 &= 7^2\\ 3^2+4^2+(3\times 4)^2 &= 13^2. \end{aligned}$$

Prove que se a e b são inteiros consecutivos então o número

$$a^2+b^2+(ab)^2$$

é um quadrado perfeito. (p. 105)

46 | Quantas Frações!

Prove que

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots+\frac{1}{1991}}}}}+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots+\frac{1}{1991}}}}}}=1.$$

(p. 105)

47 | Primos Não!

(a) Prove que o número 3999991 não é primo.

(b) Prove que o número 1000343 não é primo.

(p. 106)

48 | Trilegais

Um conjunto de números é chamado *trilegal* se pode ser dividido em subconjuntos com três elementos de tal modo que um dos elementos seja a soma dos outros dois. Por exemplo, o conjunto $\{1,2,3,\ldots,11,12\}$ é trilegal pois pode ser dividido em $\{1,5,6\}$, $\{2,9,11\}$, $\{3,7,10\}$ e $\{4,8,12\}$.

(a) Mostre que $\{1,2,\ldots,14,15\}$ é trilegal.

(b) Mostre que $\{1,2,\ldots,2010\}$ não é trilegal.

(p. 106)

49 | Diferença de Quadrados

(a) De quantas formas é possível escrever o número 105 como diferença de dois quadrados perfeitos?

(b) Mostre que não é possível escrever o número 106 como diferença de dois quadrados perfeitos.

(p. 107)

50 | Outra de Joãozinho

Joãozinho escreveu os números de 1 até 100000 no quadro, depois foi trocando cada número pela soma de seus algarismos e repetiu este processo até obter uma lista de 100000 números de um algarismo. Por exemplo, começando pelo número 7234 obtemos $7+2+3+4=16$ e $1+6=7$.

(a) Que número ficou no lugar do número 98765?

(b) Quantas vezes aparece o número 8 na lista final?

(c) Qual é o número que mais vezes se repete?

(p. 108)

51 | Colar de Ouro

Arqueólogos encontraram um colar de ouro feito de placas no formato de pentágonos regulares. Cada uma destas placas está conectada a outras duas placas, como ilustra a figura.

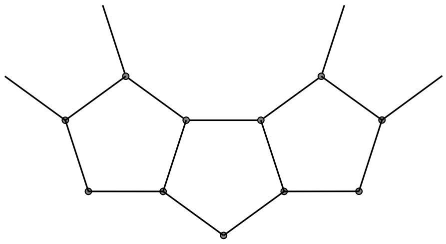


Figura 51.1

Quantas placas formam o colar? (p. 109)

52 | AP x BN

$ABCD$ é um retângulo, $AD = 5$ e $CD = 3$.

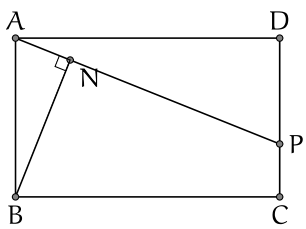


Figura 52.1

Se BN é perpendicular a AP, calcule $AP \times BN$. (p. 109)

53 | Dois Quadrados

Na figura, $ABCD$ e $CEFG$ são quadrados e o lado do quadrado $CEFG$ mede 12 cm.

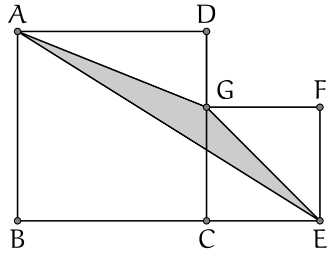


Figura 53.1

Quais são os possíveis valores da área do triângulo AEG? (p. 110)

54 | O Tesouro do Pirata

Um pirata resolveu enterrar um tesouro em uma ilha. Para tal, ele caminhou da árvore A para a rocha R_1, e depois a mesma distância e na mesma direção até o ponto X. Ele fez o mesmo em relação a entrada da caverna C e em relação à rocha R_2, alcançando os pontos Y e Z, respectivamente. Ele enterrou o tesouro em T, ponto médio de AZ.

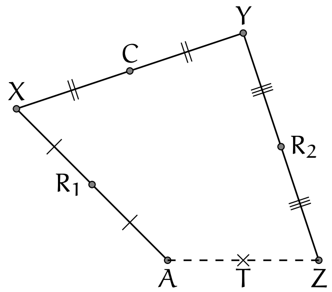


Figura 54.1

Ao voltar à ilha para desenterrar o tesouro, o pirata encontrou as rochas e a caverna, mas não encontrou a árvore. Como o pirata pode descobrir o tesouro? (p. 111)

55 | Bissetrizes

Seja ABC um triângulo com $AB = 13$, $BC = 15$ e $AC = 9$. Seja r a reta paralela a BC traçada por A. A bissetriz do ângulo $A\widehat{B}C$ corta a reta r em E e a bissetriz do ângulo $A\widehat{C}B$ corta r em F. Calcular a medida do segmento EF. (p. 112)

56 | Ângulos e Ângulos!

No interior de um triângulo ABC, toma-se um ponto E tal que $AE = BE$ e $AB = EC$. Se $A\hat{B}E = \alpha = E\hat{C}A$, $E\hat{A}C = 2\alpha$ e $E\hat{B}C = 5\alpha$, determine α. (p. 112)

57 | Quadrado, Pentágono e Icoságono

A figura mostra parte de um polígono regular de 20 lados (icoságono) $ABCDEF\ldots$, um quadrado $BCYZ$ e um pentágono regular $DEVWX$.

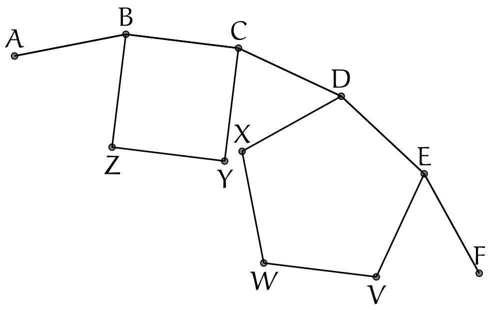


Figura 57.1

(a) Determine a medida do ângulo $Y\hat{D}C$.

(b) Mostre que o vértice X está sobre a reta DY.

(p. 113)

58 | Eneágono Regular

A figura ilustra um polígono regular de 9 lados. A medida do lado do polígono é a, a medida da menor diagonal é b e a medida da maior diagonal é d.

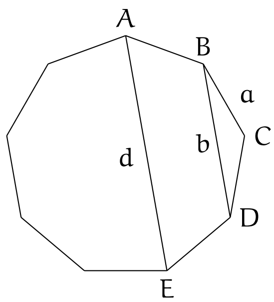


Figura 58.1

(a) Determine a medida do ângulo $B\hat{A}E$.

(b) Mostre que $d = a + b$.

(p. 114)

59 | Hexágono Equiangular

Todos os ângulos de um hexágono $ABCDEF$ são iguais. Mostre que $AB - DE = EF - BC = CD - FA$. (p. 115)

60 | Pentágono Equilátero

Mostre que é possível construir um pentágono com todos os lados de mesma medida e cujos ângulos internos meçam 60°, 80°, 100°, 140° e 160°, em alguma ordem. (p. 115)

7. Combinatória

Nível 2 | Enunciados

61 | Colorações do Cubo

De quantas formas é possível colorir as 6 faces de um cubo de preto ou branco? Duas colorações são iguais se é possível obter uma a partir da outra por uma rotação. (p. 117)

62 | Comparando Sequências

Um professor e seus 30 alunos escreveram, cada um, os números de 1 a 30 em uma ordem qualquer. A seguir, o professor comparou as sequências. Um aluno ganha um ponto cada vez que um número aparece na mesma posição na sua sequência e na do professor. Ao final, observou-se que todos os alunos obtiveram quantidades diferentes de pontos. Mostre que a sequência de um aluno coincidiu com a sequência do professor. (p. 117)

63 | Segmentos e Triângulos

Dez pontos são marcados ao redor de uma circunferência, como ilustra a figura.

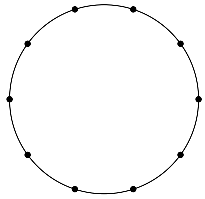


Figura 63.1

(a) Quantas cordas podem ser formadas ligando dois quaisquer destes pontos? (Uma corda é um segmento de reta ligando dois pontos sobre uma circunferência.)

(b) Quantos triângulos podem ser formados ligando três quaisquer destes pontos?

(p. 118)

64 | Esqueleto do Cubo

O esqueleto de um cubo $6 \times 6 \times 6$, formado por cubinhos $1 \times 1 \times 1$ é mostrado na figura.

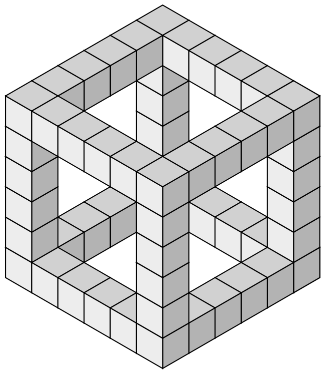


Figura 64.1

(a) Quantos cubinhos formam este esqueleto?

(b) É dado um cubo $7 \times 7 \times 7$ formado por cubinhos $1 \times 1 \times 1$. Quantos cubinhos devemos retirar para obter um esqueleto do cubo $7 \times 7 \times 7$.

(p. 119)

65 | Placas das Bicicletas

Cada uma das placas das bicicletas de Quixajuba contém três letras. A primeira letra é escolhida dentre os elementos do conjunto $\mathcal{A} = \{G, H, L, P, R\}$, a segunda letra é escolhida dentre os elementos do conjunto $\mathcal{B} = \{M, I, O\}$ e a terceira letra é escolhida dentre os elementos do conjunto $\mathcal{C} = \{D, U, N, T\}$.
Devido ao aumento no número de bicicletas da cidade, teve-se que expandir a quantidade de possibilidades de placas. Ficou determinado acrescentar duas novas letras a apenas um dos conjuntos ou uma letra nova a dois dos conjuntos.
Qual o maior número de novas placas que podem ser feitos, quando se acrescentam as duas novas letras?
(p. 119)

66 | Torneio de Tênis

Num torneio de tênis cada jogador passa para a rodada seguinte somente em caso de vitória. Se não for possível que sempre passe para a rodada seguinte um número par de jogadores, a organização do torneio decide quais rodadas determinados jogadores devem jogar. Por exemplo, um *cabeça de chave* pode, a critério dos organizadores, entrar na segunda rodada, ou passar da primeira para a terceira, de modo que o total de jogadores que participem de cada rodada seja par.

(a) Considere um torneio de tênis com 64 jogadores. Quantas partidas são disputadas?

(b) E em um torneio com 2011 jogadores?

(p. 120)

67 | Pesando Pedras

Possuímos 32 pedras, todas com pesos diferentes. Descreva um processo para mostrar que podemos encontrar as duas pedras mais pesadas com 35 pesagens em uma balança de pratos. (p. 121)

68 | Produto 2000

Quantos números naturais de cinco algarismos têm o produto de seus algarismos igual a 2000? (p. 121)

69 | Tabuleiro 123 x 123

Num tabuleiro 123×123, cada casa é pintada de roxo ou azul de acordo com as seguintes condições:

- Cada casa pintada de roxo que não está na borda do tabuleiro tem exatamente 5 casas azuis dentre suas 8 vizinhas.
- Cada casa pintada de azul que não está na borda do tabuleiro tem exatamente 4 casas roxas dentre suas 8 vizinhas.

Nota: Duas casas são vizinhas se possuem um lado ou um vértice em comum.

(a) Considere um tabuleiro 3×3 dentro do tabuleiro 123×123. Quantas casas de cada cor pode haver neste tabuleiro 3×3?

(b) Calcule o número de casas pintadas de roxo no tabuleiro 123×123.

(p. 122)

8. Diversos

Nível 2 | Enunciados

70 | Números no W

Em cada uma das casas do W da figura, escrevemos um número inteiro de 1 a 9 de modo que a soma dos três números de cada uma das quatro linhas seja a mesma.

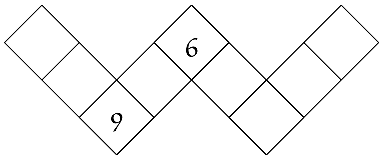


Figura 70.1

Já estão escritos o 6 e o 9. Como devem ser posicionados os outros números? (p. 123)

71 | Montando Tabelas

Montar a tabela de um torneio em que todas as n equipes se enfrentam ao longo de $n-1$ rodadas (como, por exemplo, em cada turno do Brasileirão) é um problema matemático bastante elaborado e que possui vários métodos de solução. Nesta questão, vamos conhecer uma dessas abordagens.
Vamos considerar um torneio com 6 equipes. Associaremos os números 1, 2, 3, 4, 5 e ∞ (infinito) a cada uma das equipes. A primeira rodada do torneio é $1\times\infty$, 2×5, 3×4. Para montarmos a rodada i somamos $i-1$ a cada número envolvido nas partidas da rodada inicial, considerando que

- quando a soma ultrapassa 5, subtraímos 5 do resultado;
- ∞ adicionado a qualquer inteiro positivo é ∞. Por exemplo, a segunda rodada será:

$$(1+1)\times(\infty+1), \text{ isto é, } 2\times\infty$$
$$(2+1)\times(5+1), \text{ isto é, } 3\times 1$$
$$(3+1)\times(4+1), \text{ isto é, } 4\times 5$$

(a) Determine as 3 rodadas restantes do torneio, seguindo o método descrito acima.

(b) A partir do procedimento mostrado, exiba as 7 rodadas de um torneio com 8 equipes.

(p. 124)

72 | Numerando os Vértices

Distribuímos nos vértices de um bloco retangular oito números dentre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 de tal forma que a soma dos números de uma face qualquer seja igual a 18.

(a) Quais os números descartados na distribuição?

(b) Exiba uma possível distribuição.

(p. 125)

73 | Corrida de São Paulo a Fortaleza

Numa corrida de São Paulo a Fortaleza participam quatro carros A, B, C, D que largaram na seguinte ordem: primeiro A, segundo B, terceiro C e por último D. Durante a corrida, A e B trocaram de posição (ultrapassaram um ao outro) 9 vezes e B e C trocaram de posição 8 vezes.
Para saber em que ordem chegaram à Fortaleza, só é permitido fazer perguntas do tipo:

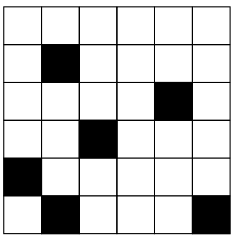
"Quantas vezes trocaram de posição os carros X e Y?"

Antes de fazer uma pergunta se conhece a resposta da pergunta anterior. Formule três perguntas que permitam determinar a ordem em que os quatro terminaram a corrida. (p. 125)

74 | Casas Pretas e Brancas

Considere um tabuleiro 6×6 com suas casas coloridas de branco ou preto. Duas casas são chamadas *vizinhas* se possuem um lado comum. A coloração do tabuleiro vai mudando a cada segundo, respeitando a seguinte condição: se num determinado segundo pelo menos duas casas vizinhas de uma determinada casa estão coloridas de preto, então no próximo segundo esta última casa será colorida de preto.

(a) A figura abaixo mostra uma possível coloração inicial. Como ficará o tabuleiro após 12 segundos? E após 13 segundos?



(b) Exiba uma coloração inicial com 6 casas pretas de modo que, em algum momento, todas as casas fiquem pretas.

(p. 125)

9. Desafios

Nível 2 | Enunciados

75 | Ora Bolas!

Cinco bolas iguais estão se movendo na mesma direção ao longo de uma reta fixa, mantendo uma certa distância de uma para outra. Na mesma direção, mas no sentido oposto, outras cinco bolas se movem de encontro às primeiras. As velocidades de todas as bolas são iguais. Quando duas bolas colidem, voltam na mesma velocidade de antes, ao longo da mesma direção. Quantas colisões entre bolas vão ocorrer? (p. 127)

76 | Distância entre os Vilarejos

A estrada que liga dois vilarejos em uma montanha é formada somente por trechos de subida ou descida. Um ônibus sempre viaja a 15 km/h em trechos de subida e a 30 km/h em trechos de descida. Encontre a distância entre os vilarejos se o ônibus leva exatamente 4 horas para fazer a viagem completa de ida e volta. (p. 127)

77 | Amigos que você pode Contar!

Considere um grupo de 15 pessoas. É possível que cada uma delas conheça exatamente:

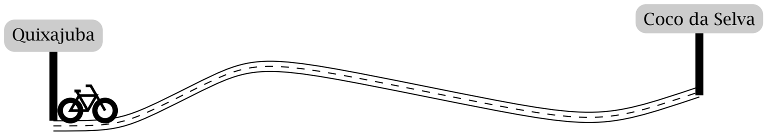
(a) 4 pessoas do grupo?

(b) 3 pessoas do grupo?

(Admita que se A conhece B então B conhece A.) (p. 128)

78 | Três Amigos e uma Bicicleta

A distância entre Coco da Selva e Quixajuba é 24 km. Dois amigos precisam ir de Quixajuba a Coco da Selva e um terceiro amigo precisa ir de Coco da Selva a Quixajuba. Eles possuem uma bicicleta que inicialmente está em Quixajuba. Cada um deles pode ir caminhando a velocidade de 6 km/h, ou de bicicleta a velocidade de 18 km/h. Além disso, podem deixar a bicicleta em qualquer ponto do trajeto.



Mostre como eles podem proceder para chegarem a seus destinos em no máximo 2h 40min. (p. 128)

79 | Contando Polígonos

Em uma circunferência foram marcados 15 pontos brancos e 1 ponto preto. Consideremos todos os possíveis polígonos (convexos) com seus vértices nestes pontos.
Vamos separá-los em dois tipos:

- Tipo 1: os que possuem somente vértices brancos.
- Tipo 2: os que possuem o ponto preto como um dos vértices.

Existem mais polígonos do tipo 1 ou do tipo 2? Quantos existem a mais? (p. 129)

80 | Desafiando os Amigos!

(a) Adriano escolheu secretamente cinco números a, b, c, d e e e informou a Bruna os dez números 24, 28, 30, 30, 32, 34, 36, 36, 40 e 42 obtidos pelo cálculo de todas as somas de dois números dentre os cinco escolhidos.

O objetivo de Bruna é descobrir a, b, c, d, e. Bruna pode alcançar seu objetivo?

(b) Adriano escolheu secretamente quatro números m, n, p e q e informou a Carlos os seis números 10, 20, 22, 24, 26 e 36 obtidos pelo cálculo de todas as somas de dois números dentre os quatro escolhidos.

O objetivo de Carlos é descobrir m, n, p e q. Ele pode alcançar seu objetivo?

(p. 130)

Nível 3

10. Aritmética e Álgebra

Nível 3 | Enunciados

81 | Sequência Numérica II

A sequência de números $t_1, t_2, t_3, \ldots$ está definida por

$$\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_{n+1} = \dfrac{t_n - 1}{t_n + 1} \end{cases}$$

para cada inteiro positivo n. Encontrar t_{2011}. (p. 133)

82 | Progressão Geométrica

A progressão geométrica 121, 242, 484, 968, 1936,... possui três termos inteiros entre 200 e 1200.

(a) Encontre uma progressão geométrica crescente que possui quatro termos inteiros entre 200 e 1200.

(b) Encontre uma progressão geométrica crescente que possui seis termos inteiros entre 200 e 1200.

(p. 134)

83 | Funciona?

Para um inteiro positivo n considere a função

$$f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}.$$

Calcule o valor de

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(40).$$

(p. 134)

84 | Sistema de Três Equações

Sejam a e b números reais tais que existam números reais distintos m, n e p, satisfazendo as igualdades abaixo:

$$\begin{cases} m^3 + am + b = 0 \\ n^3 + an + b = 0 \\ p^3 + ap + b = 0. \end{cases}$$

Mostre que $m + n + p = 0$. (p. 135)

85 | Soma de Potências

(a) Mostre que a identidade abaixo é sempre verdadeira:

$$a^{n+1} + b^{n+1} = (a+b)(a^n + b^n) - ab(a^{n-1} + b^{n-1}).$$

(b) Sejam a e b números reais tais que $a + b = 1$ e $ab = -1$. Mostre que o número $a^{10} + b^{10}$ é inteiro, calculando seu valor.

(p. 135)

86 | Sistema com Potências

(a) Verifique a identidade

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a).$$

(b) Resolva o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1. \end{cases}$$

(p. 136)

87 | Sistema com 7 Variáveis

(a) Determine a, b e c tais que a igualdade

$$(n+2)^2 = a(n+1)^2 + bn^2 + c(n-1)^2$$

seja verdadeira qualquer que seja o número n.

(b) Suponha que $x_1, x_2, \ldots, x_7$ satisfazem o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 1 \\ 4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 = 12 \\ 9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 = 123 \end{cases}$$

Determine o valor de

$$16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7.$$

(p. 137)

88 | Algarismo do Quadrado

O quadrado de 13 é 169, que tem como algarismo das dezenas o número 6. O quadrado de outro número tem como algarismo das dezenas o número 7. Quais são os possíveis valores para o algarismo das unidades desse quadrado? (p. 138)

89 | Maior Divisor Ímpar

Seja n um número inteiro positivo. Para cada um dos inteiros $n+1, \ldots, 2n$ considere o seu maior divisor ímpar. Prove que a soma de todos estes divisores é igual a n^2. (p. 138)

90 | Algarismos

Com os algarismos a, b e c construímos o número de três algarismos abc e os números de dois algarismos ab, bc e ca. Ache todos os possíveis valores de a, b e c tais que $\dfrac{abc + a + b + c}{ab + bc + ca}$ seja um número inteiro. (p. 139)

11. Combinatória e Probabilidade

Nível 3 | Enunciados

91 | Produto Par

Tio Mané tem duas caixas, uma com sete bolas distintas numeradas de 1 a 7 e outra com oito bolas distintas numeradas com todos os números primos menores que 20. Ele sorteia uma bola de cada caixa. Qual é a probabilidade de que o produto dos números das bolas sorteadas seja par? (p. 141)

92 | Subconjuntos com Soma Grande

Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2011\}$. Quantos subconjuntos de A existem de modo que a soma de seus elementos seja 2023060? (p. 141)

93 | Formiga Aleatória

Uma formiga se movimenta uma unidade por segundo sobre os pontos 0, 1 e 2 da figura a seguir, começando do ponto 0.

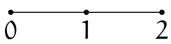


Figura 93.1

(a) Quais são os possíveis percursos da formiga até 3 segundos?

(b) Quantos possíveis percursos pode fazer a formiga até 10 segundos?

(p. 142)

94 | Algarismos e Paridade

Tiago escreve todos os números de quatro algarismos não nulos distintos que possuem a mesma paridade. Qual a probabilidade de que, ao escolhermos um desses números, ele seja par? (p. 142)

95 | Bolas Pretas, Brancas e Azuis

Considere uma urna que contém uma bola preta, quatro bolas brancas e algumas bolas azuis. Uma bola é retirada ao acaso dessa urna, sua cor é observada e a bola é devolvida à urna. Em seguida, retira-se novamente, ao acaso, outra bola dessa urna. Para quais quantidades de bolas azuis, a probabilidade das duas bolas retiradas terem mesma cor vale $1/2$? (p. 143)

96 | Aparando um Poliedro

Considere um poliedro convexo com 100 arestas. Todos os vértices foram *aparados* próximos a eles mesmos, usando uma faca plana afiada (isto foi feito de modo que os planos resultantes não se intersectassem no interior ou na fronteira do poliedro). Calcule para o poliedro resultante:

(a) o número de vértices.

(b) o número de arestas.

(p. 143)

97 | Bolas Azuis e Vermelhas

Existem bolas azuis e bolas vermelhas em uma caixa. A probabilidade de sortear duas bolas de cores diferentes, ao retirar duas bolas ao acaso, é $1/2$. Prove que o número de bolas na caixa é um quadrado perfeito. (p. 144)

98 | Dez Pontos no Plano

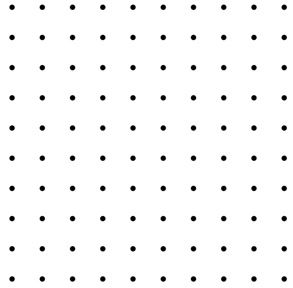
Dez pontos são dados no plano e não existem três colineares. Quatro segmentos distintos ligando pares destes pontos são escolhidos ao acaso, mas todos com a mesma probabilidade. Qual é a probabilidade de três dos segmentos escolhidos formarem um triângulo? (p. 144)

99 | Contando Diagonais no Poliedro

Um poliedro convexo $\mathcal{P}$ tem 26 vértices, 60 arestas e 36 faces. 24 faces são triangulares e 12 são quadriláteros. Uma *diagonal espacial* é um segmento de reta unindo dois vértices não pertencentes a uma mesma face. $\mathcal{P}$ possui quantas diagonais espaciais? (p. 145)

100 | Grade de Pontos

Uma grade de pontos com 10 linhas e 10 colunas é dada. Cada ponto é colorido de vermelho ou de azul. Sempre que dois pontos da mesma cor são vizinhos em uma mesma linha ou coluna, eles são ligados por um segmento da mesma cor dos pontos. Se dois pontos são vizinhos mas de cores diferentes, são ligados por um segmento verde. No total, existem 52 pontos vermelhos. Destes vermelhos, 2 estão nos cantos e outros 16 estão no bordo da grade. Os outros pontos vermelhos estão no interior da grade.



Existem 98 segmentos verdes. Determine o número de segmentos azuis. (p. 145)

12. Geometria

Nível 3 | Enunciados

101 | Triângulo 20 – 40 – 120

Num triângulo ABC, o ângulo $A\hat{B}C$ mede 20° e o ângulo $A\hat{C}B$ mede 40°. Seja E um ponto sobre BC tal que $BE = BA$.

(a) Mostre que o triângulo CEA é isósceles.

(b) Sabendo que o comprimento da bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ é 2, determine $BC - AB$.

(p. 147)

102 | Um Problema Antigo!

"Duas torres, uma com 30 passos e a outra com 40 passos de altura, estão à distância de 50 passos uma da outra. Entre ambas se acha uma fonte, para a qual dois pássaros descem no mesmo momento do alto das torres com a mesma velocidade e chegam ao mesmo tempo. Quais as distâncias horizontais da fonte às duas torres?"*(Leonardo de Pisa, Liber Abaci, 1202).* (p. 148)

103 | Circunferências Tangentes

As circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são tangentes à reta ℓ nos pontos A e B e tangentes entre si no ponto C. Prove que o triângulo ABC é retângulo.

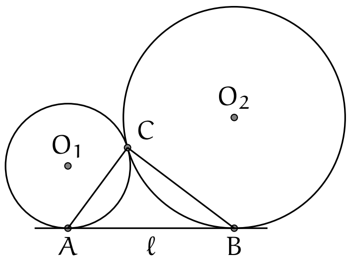


Figura 103.1

(p. 148)

104 | Triângulo Isósceles II

Seja ABC um triângulo isósceles com $AB = AC$ e $\widehat{A} = 30°$. Seja D o ponto médio da base BC. Sobre AD e AB tome dois pontos P e Q, respectivamente, tais que $PB = PQ$. Determine a medida do ângulo $P\widehat{Q}C$. (p. 149)

105 | Circunferência no Setor

Uma circunferência de raio r está inscrita em um setor circular de raio R. O comprimento da corda AB é igual a $2a$.

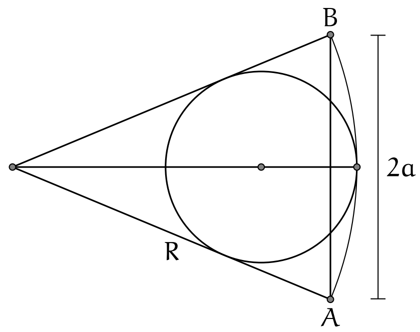


Figura 105.1

Prove que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}.$$

(p. 149)

106 | Mais Circunferências Tangentes

(a) Duas circunferências de raios R e r são tangentes externamente (figura 106.1). Demonstre que o segmento determinado pela tangente comum externa ℓ mede $d = 2\sqrt{Rr}$.

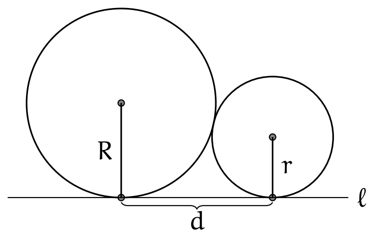


Figura 106.1

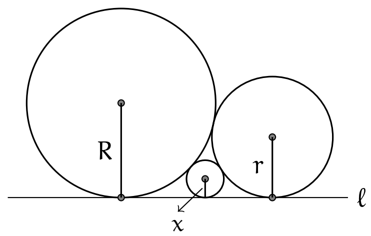


Figura 106.2

(b) Considere, como ilustrado na 106.2, as três circunferências de raios R, r e x, tangentes duas a duas e tangentes à reta ℓ. Mostre que

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

(p. 150)

107 | Reta Equilibrada

Seja ABC um triângulo tal que $AB = 55$, $AC = 35$ e $BC = 72$. Considere uma reta ℓ que corta o lado BC em D e o lado AC em E e que divide o triângulo em duas figuras com perímetros iguais e áreas iguais. Determine a medida do segmento CD. (p. 151)

108 | Alturas e Pontos Médios

O triângulo acutângulo ABC de ortocentro H é tal que $AB = 48$ e $HC = 14$. O ponto médio do lado AB é M e o ponto médio do segmento HC é N.

(a) Mostre que o ângulo $M\hat{E}N$ é reto.

(b) Determine o comprimento do segmento MN.

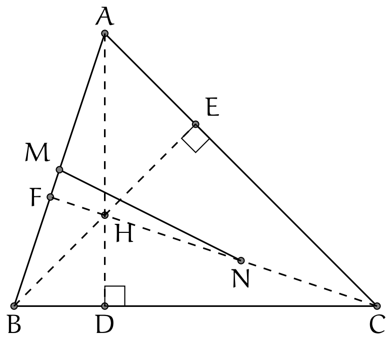


Figura 108.1

(p. 152)

109 | É Proibido usar Régua!

(a) Sejam $\mathcal{C}$ uma circunferência com centro O e raio r e X um ponto exterior a $\mathcal{C}$. Construímos uma circunferência de centro em X passando por O, a qual intersecta $\mathcal{C}$ nos pontos P e Q. Com centro em P construímos uma circunferência passando por O e com centro em Q construímos uma outra circunferência passando por O. Estas duas circunferências intersectam-se nos pontos O e Y.

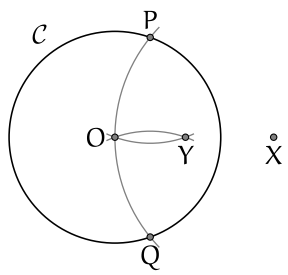


Figura 109.1

Prove que $OX \times OY = r^2$.

(b) É dado um segmento AB. Mostre como construir, usando somente compasso, um ponto C tal que B seja o ponto médio do segmento AC.

(c) É dado um segmento AB. Mostre como construir, usando somente compasso, o ponto médio do segmento AB.

(p. 153)

110 | Pés das Perpendiculares

Seja ABC um triângulo acutângulo com alturas BD e CE. Os pontos F e G são os pés das perpendiculares BF e CG a reta DE. Prove que $EF = DG$. (p. 154)

13. Diversos

Nível 3 | Enunciados

111 | Jogo Triangulário

Um jogo solitário é realizado em um tabuleiro no formato de triângulo equilátero, mostrado na figura 111.1. Sobre cada círculo coloca-se uma ficha. Cada ficha é branca de um lado e preta do outro. Inicialmente, só a ficha que está situada em um vértice tem a face preta para cima e as outras fichas têm a face branca para cima. Em cada movimento, retira-se uma ficha preta do tabuleiro e cada uma das fichas que ocupam um círculo vizinho à ficha retirada são viradas. Círculos vizinhos são os que estão unidos por um segmento.

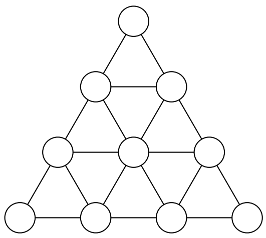


Figura 111.1

Após vários movimentos, será possível tirar todas as fichas do tabuleiro? (p. 155)

112 | Bolas nas Caixas

Duas caixas contêm juntas 65 bolas de vários tamanhos. Cada bola é branca, preta, vermelha ou amarela. Cada vez que pegamos cinco bolas da mesma cor, pelo menos duas são do mesmo tamanho.

(a) Qual é o número máximo de tipos de bolas que existem nas caixas? Duas bolas são consideradas de tipos distintos quando têm diferentes cores ou tamanhos.

(b) Mostrar que existem pelo menos três bolas, que estão na mesma caixa, e que são do mesmo tipo.

(p. 155)

113 | Frações Irredutíveis

Duas frações irredutíveis têm seus denominadores iguais a 600 e 700. Encontrar o valor mínimo para o denominador da soma das frações. (p. 156)

114 | Soma das Quintas Potências

Seja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma sequência na qual cada termo é 0, 1 ou -2. Se

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -5 \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 19 \end{cases},$$

determine $x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_n^5$. (p. 156)

115 | Comendo Pizzas

Um grupo de meninos e meninas se reúne para comer pizzas que são cortadas em 12 pedaços. Cada menino pode comer 6 ou 7 pedaços e cada menina pode comer 2 ou 3 pedaços. Sabemos que quatro pizzas nunca são suficientes para alimentar o grupo e que com cinco pizzas sempre há sobra. Quantos meninos e quantas meninas formam o grupo? (p. 157)

14. Desafios

Nível 3 | Enunciados

116 | Quatro Cores no Tabuleiro

Considere o tabuleiro 9×9 mostrado abaixo. As linhas estão numeradas de 1 a 9.

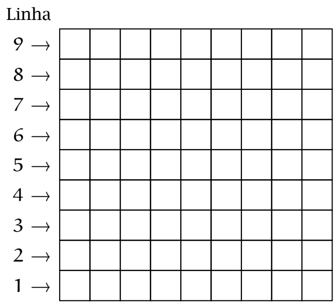
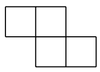


Figura 116.1

Colorimos as casas das linhas ímpares do tabuleiro com as cores azul e branco, alternadamente, começando com azul e pintamos as casas das linhas pares do tabuleiro de cinza e vermelho, alternadamente, começando com a cor cinza.

(a) Quantas casas foram pintadas com cada cor?

(b) Qual é o número máximo de peças da forma  que podem ser colocadas, sem sobreposição, nesse tabuleiro?

(p. 159)

117 | Números no Tabuleiro 8 x 8

Guilherme escreveu um número em cada casa de um tabuleiro 8×8 de modo que a soma dos números das casas vizinhas de cada casa do tabuleiro é igual a 1. Calcule a soma de todos os números escritos por Guilherme.
Observação: duas casas são vizinhas se possuem um lado em comum. (p. 160)

118 | Formigas Geométricas!

Três formigas estão paradas em três dos quatro vértices de um retângulo no plano. As formigas se movem no plano uma por vez. A cada vez, a formiga que se move o faz segundo a reta paralela à determinada pelas posições das outras duas formigas. É possível que, após alguns movimentos, as formigas se situem nos pontos médios de três dos quatro lados do retângulo original? (p. 160)

119 | Ponto no Interior do Quadrado

P é um ponto no interior do quadrado $ABCD$ tal que $PA = 1$, $PB = 2$ e $PC = 3$. Qual é a medida do ângulo $A\hat{P}B$?

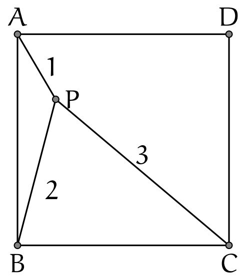


Figura 119.1

(p. 161)

120 | Pontos no Interior do Disco

(a) Mostre que não existem dois pontos com coordenadas inteiras no plano cartesiano que estão igualmente distanciados do ponto $(\sqrt{2}, 1/3)$.

(b) Mostre que existe um círculo no plano cartesiano que contém exatamente 2011 pontos com coordenadas inteiras em seu interior.

(p. 162)

Sugestões e Fatos que Ajudam

1. Múltiplo de 9 com Algarismos Pares. Sugestão: Determine o valor mínimo para a soma dos algarismos do número.

Fatos que Ajudam: A soma dos algarismos de um múltiplo de 9 é divisível por 9.

2. Guardando Cubos. Sugestão: Note que a medida da aresta do cubo deve ser um divisor de cada uma das três medidas das dimensões da caixa.

3. Calculadora Quebrada. Sugestão: Determine os possíveis valores para o produto e suas fatorações.

Fatos que Ajudam: 101 é primo.

4. Loja em Quixajuba. Sugestão: Mostre inicialmente que ele não pode ter comprado mais de 127 artigos.

5. Números Sortudos. Sugestão: Observe que a partir do número 777, todos os números deixam o mesmo resto na divisão por 1000.

6. Somando Idades. Sugestão: Observe a quantidade de vezes que a idade de uma pessoa foi considerada nas dez somas.

7. Menor Soma Positiva. Sugestão: Se o produto dos números é igual a zero, então um dos números deve ser igual a zero.

8. Média dos Algarismos. Sugestão: Observe o que ocorre com a soma dos algarismos do número quando se faz a operação descrita no problema.

Fatos que Ajudam: A média aritmética de dois números a e b é dada por

$$\frac{a+b}{2}.$$

9. Sequência Numérica I. Sugestão: Analise os restos dos números da sequência quando são divididos por 3.

Fatos que Ajudam: Um número e a soma de seus algarismos deixam o mesmo resto quando divididos por 3.

10. Estrelas em Geometrix. Sugestão: Separe as estrelas deixando os números compartilhadas sempre na estrela à direita.

11. Bandeira do Tio Mané. Sugestão: Trace as diagonais do retângulo e calcule a área das quatro partes determinadas.

Fatos que Ajudam: Triângulos com a mesma base e a mesma altura têm áreas iguais.

12. Abelha na Flor. Sugestão: Determine a medida do lado do quadrado.

13. Ângulo da Asa Delta. Sugestão: Mostre que os triângulos ABC e ADC são iguais.

Fatos que Ajudam: A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

14. Azulejos de Pedro. Sugestão: Perceba que deve haver uma peça em **L** cobrindo cada canto da bancada. Além disso, calcule quantas peças de cada tipo são necessárias para cobrir a área de cada bancada.

16. Plantando Jasmins. Sugestão: Trace um segmento de reta ligando os pontos médios relatados no problema.

Fatos que Ajudam: Traçando uma diagonal de um retângulo, este fica dividido em dois triângulos de mesma área.

17. Tangram. Sugestão: Determine a que fração da área do tangram corresponde cada uma das peças.

18. Triângulo Isósceles I. Sugestão: Considere três casos dependendo de quais dos lados do triângulo BDE são iguais.

Fatos que Ajudam: A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Triângulo isósceles é aquele que tem dois lados iguais e, portanto, também tem dois ângulos internos iguais.

19. Formando um Retângulo. Sugestão: Divida o retângulo maior em quadrados.

20. Construindo uma Pipa. Sugestão: Mostre que a área de cada um dos quatro triângulos é igual ao triplo da área do retângulo $ABCD$.

Fatos que Ajudam: Construindo uma diagonal de um retângulo, este fica dividido em dois triângulos de mesma área.

24. Moedas e Pesagens. Sugestão: Divida as moedas em três grupos de 16 moedas.

25. Distribuindo Maçãs. Sugestão: Para maximizar o número de garotos temos de minimizar o número de maçãs que cada um recebe.

26. Maria e seus Convidados. Sugestão: Determine inicialmente o maior quadrado perfeito que é a soma de dois números dentre os citados.

27. Cartões de Apostas. Sugestão: Comece comparando os cartões de A e de B.

28. Números de 1 a 16. Sugestão: Encontre todos os possíveis vizinhos do número 16.

29. Calculando Somas. Sugestão: Observe que as duas regiões formadas são iguais. No item (c), conte as casas de cada peça por linha.

31. Vizinhos e Distantes. Sugestão: Analise os possíveis vizinhos do número 50 e do número 51.

33. Campeonato de Quixajuba. Sugestão: O número máximo de pontos no campeonato é três vezes a quantidade de jogos. A cada empate, este número diminui em uma unidade.

35. Somando Algarismos. Sugestão: Observe que todos os algarismos não podem ser menores que 8.

36. Contando Quadrados. Sugestão: Verifique que existem quadrados inclinados, de dois tamanhos diferentes.

38. O Tabuleiro Mutilado. Sugestão: Cada peça do dominó sempre cobre uma casa preta e uma casa branca.

39. Dividindo um Retângulo. Sugestão: Analise a possibilidade de se obter 39 e 27 como soma de várias parcelas 5 e 11.

40. Números no Tabuleiro 4 x 4. Sugestão: Comece preenchendo o tabuleiro pelas casas vizinhas a um canto.

41. Múltiplo de 36. Fatos que Ajudam: A soma dos algarismos de um múltiplo de 9 é divisível por 9.

42. Quem é maior?. Sugestão: Observe que cada parcela de S é da forma

$$n \times (n+10)$$

e cada parcela de R é da forma

$$(n+2) \times (n+8).$$

Fatos que Ajudam:

$$(a+b) \times (c+d) =$$
$$ac + ad + bc + bd.$$

43. Resto da Divisão. Sugestão: No item (b), analise os números que possuem a soma dos algarismos maior ou igual a 17.

44. Soma de Consecutivos. Sugestão: Para quatro números consecutivos use a notação x, $x+1$, $x+2$, $x+3$.

Fatos que Ajudam: (a) O único número primo par é 2. (b) O único número primo múltiplo de 3 é 3.

45. Quadrado Perfeito. Sugestão: Mostre que a expressão considerada é igual a

$$(ab+1)^2.$$

Fatos que Ajudam:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

46. Quantas Frações!. Sugestão: Elimine as milhares de frações, fazendo

$$A = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{1991}}}}.$$

47. Primos Não!. Sugestão: Tente fatorar os números dados:

(a) Escrevendo o número dado como uma diferença de dois quadrados.

(b) Escrevendo o número dado como uma soma de dois cubos.

Fatos que Ajudam: Utilize as identidades:

(a) $m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)$

(b) $m^3 + n^3 = (m+n)(m^2 - mn + n^2)$

48. Trilegais. Sugestão: Estude a quantidade de números pares e ímpares em um dos subconjuntos com três elementos.

Fatos que Ajudam: A soma de dois números pares ou ímpares resulta num número par. A soma de um número par com um número ímpar resulta num número ímpar.

49. Diferença de Quadrados. Fatos que Ajudam: A diferença entre os quadrados de dois números é igual ao produto da soma destes números pela diferença dos mesmos números. Algebricamente:

$$m^2 - n^2 = (m+n)(m-n).$$

50. Outra de Joãozinho. Sugestão: Verifique que a sequência que fica no quadro depois de todo o processo é periódica.

Fatos que Ajudam: Um número e a soma de seus algarismos deixam o mesmo resto quando são divididos por 9.

51. Colar de Ouro. Sugestão: Calcule o ângulo interno do polígono determinado pelo colar.

Fatos que Ajudam: A medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados é dada pela fórmula $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$.

52. AP x BN. Sugestão: Calcule a área do triângulo APB de dois modos distintos.

Fatos que Ajudam: A área de um triângulo é igual a metade do produto da medida da base pela medida da altura relativa à essa base.

53. Dois Quadrados. Sugestão: Trace a diagonal AC.

Fatos que Ajudam: Triângulos com mesma base e mesma altura possuem áreas iguais.

54. O Tesouro do Pirata. Sugestão: Mostre que a posição T do tesouro não depende do ponto inicial A.

Fatos que Ajudam: Em todo quadrilátero, os pontos médios dos lados são vértices de um paralelogramo.

55. Bissetrizes. Sugestão: Mostre que CAF e BAE são triângulos isósceles.

Fatos que Ajudam: A bissetriz de um ângulo o divide em dois ângulos de mesma medida.

56. Ângulos e Ângulos!. Sugestão: Mostre que o triângulo BEC é isósceles.

Fatos que Ajudam: A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

57. Quadrado, Pentágono e Icoságono. Sugestão: Para o item (b), determine a medida do ângulo $C\hat{D}X$.

Fatos que Ajudam: A medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados é dada pela fórmula $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$.

58. Eneágono Regular. Sugestão: No item (b), prolongue os lados AB e ED, determinando o ponto de interseção X.

Fatos que Ajudam: A soma das medidas dos ângulos de um polígono de n lados é dada pela fórmula $180^\circ(n-2)$. A medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados é dada pela fórmula $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$.

59. Hexágono Equiangular. Sugestão: Prolongue os lados do hexágono.

Fatos que Ajudam: A soma dos ângulos internos de um polígono com n lados é igual a $180^\circ(n-2)$.

60. Pentágono Equilátero. Sugestão: Suponha que o pentágono já foi construído; comece investigando pelo ângulo cuja medida é 60°.

Fatos que Ajudam: Se um quadrilátero possui os quatro lados de mesma medida, então ele é um losango. Em um losango, os ângulos opostos possuem a mesma medida.

62. Comparando Sequências. Sugestão: Selecione uma pessoa que não acertou todos os pontos e determine o número máximo de pontos que ela pode ter acertado.

63. Segmentos e Triângulos. Sugestão: Para o item (a), conte o número de cordas que saem de um determinado ponto.

65. Placas das Bicicletas. Sugestão: Calcule o número inicial de placas que podem ser feitas com os elementos dos conjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ e depois refaça o cálculo analisando as diversas possibilidades de aumentar em 1 ou 2 os elementos dos conjuntos.

66. Torneio de Tênis. Sugestão: No item (b), considere os jogadores que são eliminados ao invés dos que passam para as próximas rodadas.

67. Pesando Pedras. Sugestão: Divida as pedras em pares e realize as pesagens, eliminando as pedras mais leves. Perceba que a segunda pedra mais pesada somente pode ser eliminada pela pedra mais pesada.

68. Produto 2000. Sugestão: Decomponha 2000 em fatores primos.

69. Tabuleiro 123 x 123. Sugestão: (a) Divida em dois casos de acordo com a cor da casa central. (b) Determine o número de tabuleiros 3×3 que podem ser colocados no tabuleiro 123×123.

70. Números no W. Sugestão: Determine os possíveis valores que podem ser colocados na casa vazia comum às duas linhas.

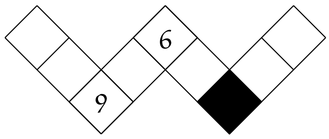


Figura 70.1

Fatos que Ajudam: A soma dos 9 primeiros números inteiros positivos é

$$1 + 2 + \cdots + 9 = 45.$$

71. Montando Tabelas. Sugestão: Somar $i - 1$ à primeira rodada equivale a somar 1 à rodada anterior.

72. Numerando os Vértices. Sugestão: Calcule as somas dos números de todas as faces do paralelepípedo e observe quantas vezes cada vértice está sendo contado nessa soma.

Fatos que Ajudam:

$$1 + 2 + \cdots + 10 = 55.$$

73. Corrida de São Paulo a Fortaleza. Sugestão: Observe que se dois carros trocam de posição duas vezes, a ordem entre eles continua a mesma.

77. Amigos que você pode Contar!. Sugestão: Mostre que a situação do item (a) é possível e a do item (b) não.

78. Três Amigos e uma Bicicleta. Sugestão: Perceba que para chegarem em até 2 h 40 min, cada um deve fazer pelo menos metade do percurso de bicicleta.

79. Contando Polígonos. Sugestão: Construa um polígono do tipo 2 a partir de um polígono do tipo 1.

80. Desafiando os Amigos!. Sugestão:

(a) Suponha

$$a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e.$$

O que podemos dizer sobre $a + b$? E sobre $d + e$? E sobre $a + c$?

(b) Carlos não conseguirá alcançar seu objetivo porque existem dois conjuntos formados por quatro números que geram os números 10, 20, 22, 24, 26 e 36.

81. Sequência Numérica II. Sugestão: Calcule os primeiros cinco termos da sequência.

82. Progressão Geométrica. Sugestão: A razão da progressão geométrica tem que ser menor que 2.

83. Funciona?. Sugestão: Faça $a = \sqrt{2n+1}$ e $b = \sqrt{2n-1}$.

Fatos que Ajudam: Utilize a identidade

$$(a^2 + ab + b^2)(a - b) = a^3 - b^3.$$

84. Sistema de Três Equações. Sugestão: Subtraia as equações dadas e fatore o resultado. Depois, faça o mesmo com a primeira e a terceira equações.

Fatos que Ajudam: Diferença de dois cubos:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

A soma das raízes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ é igual a $-b/a$.

85. Soma de Potências. Sugestão: Expanda

$$(a + b)(a^n + b^n).$$

87. Sistema com 7 Variáveis. Sugestão: (a) Expanda os termos e os agrupe como o polinômio na variável n. (b) Utilize os valores encontrados em (a).

Fatos que Ajudam: Se um polinômio se anula para infinitos valores, então todos os seus coeficientes são nulos.

88. Algarismo do Quadrado. Sugestão: Escreva o número como $10a + b$, sendo b um algarismo.

89. Maior Divisor Ímpar. Sugestão: Sendo S_n a soma de tais divisores, calcule a diferença $S_n - S_{n-1}$.

Fatos que Ajudam: A soma dos n primeiros números ímpares é

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

90. Algarismos. Sugestão: Mostre que o denominador é sempre divisível por 11 e que $a + c = 11$.

Fatos que Ajudam: $abc = 100a + 10b + c$, $ab = 10a + b$.

91. Produto Par. Sugestão: Calcule a probabilidade do produto ser ímpar.

93. Formiga Aleatória. Sugestão: Observe que a formiga sempre está no 1 nos segundos ímpares.

94. Algarismos e Paridade. Sugestão: Conte os números pares e os números ímpares separadamente.

95. Bolas Pretas, Brancas e Azuis. Sugestão: Considere n o número de bolas azuis da urna e determine as probabilidades de as duas bolas retiradas serem ambas pretas, ambas brancas e ambas azuis.

Fatos que Ajudam: A probabilidade que aconteça um dentre três eventos independentes é a soma das probabilidades que cada um aconteça.

96. Aparando um Poliedro. Sugestão: Determine a relação entre as arestas do antigo poliedro e os vértices do novo.

97. Bolas Azuis e Vermelhas. Fatos que Ajudam: O número de modos de escolher dois dentre n objetos distintos é $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Veja *Contando Subconjuntos* na página 118.

98. Dez Pontos no Plano. Fatos que Ajudam: O número de maneiras de escolher k objetos distintos dentre n objetos distintos é

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Veja o quadro na página 118.

99. Contando Diagonais no Poliedro. Sugestão: Conte o número total de segmentos determinados pelos vértices e retire os que não são diagonais espaciais.

Fatos que Ajudam: O número de modos de escolher dois objetos dentre n objetos distintos é $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Veja o quadro na página 118.

100. Grade de Pontos. Sugestão: Conte o número total de segmentos e conte o total de segmentos que partem de pontos vermelhos.

Fatos que Ajudam: De pontos vermelhos não saem segmentos azuis.

101. Triângulo 20 – 40 – 120. Sugestão: Determine as medidas dos ângulos que aparecem na construção.

102. Um Problema Antigo!. Sugestão: Utilize o teorema de Pitágoras.

103. Circunferências Tangentes. Sugestão: Trabalhe os ângulos dos triângulos isósceles AO_1C e BO_2C.

Fatos que Ajudam: Dadas duas circunferências tangentes, o ponto de tangência e os dois centros pertencem a uma mesma reta.

104. Triângulo Isósceles II. Sugestão: Mostre que os ângulos $A\hat{Q}P$ e $A\hat{C}P$ somam $180°$.

Fatos que Ajudam: Um quadrilátero é inscritível se a soma dos ângulos opostos é $180°$. Ângulos inscritos no mesmo arco são iguais.

105. Circunferência no Setor. Sugestão: Ligue o centro da circunferência inscrita no setor ao ponto de tangência desta com o raio do setor circular. Procure triângulos semelhantes.

Fatos que Ajudam: Se duas circunferências são tangentes, então o ponto de tangência e os centros das circunferências são colineares.

Se uma reta é tangente a uma circunferência, então o segmento que une o centro da circunferência ao ponto de tangência é perpendicular à reta.

106. Mais Circunferências Tangentes. Sugestão: (a) Trace uma reta pelo centro da menor circunferência, paralela à reta ℓ.

Fatos que Ajudam: Se duas circunferências são tangentes, então o ponto de tangência e os centros das circunferências são colineares.

Se uma reta é tangente a uma circunferência, então o segmento que une o centro da circunferência ao ponto de tangência é perpendicular à reta.

107. Reta Equilibrada. Sugestão: Calcule a área do $\triangle CED$, a qual é metade da área do $\triangle ABC$.

Fatos que Ajudam: A área S de um triângulo que possui dois lados de medidas a e b e estes determinam um ângulo θ pode ser calculada pela fórmula

$$S = \frac{ab \operatorname{sen} \theta}{2}.$$

Demonstração: A área do triângulo da figura 107.1 é $ah/2$, mas $h = b \operatorname{sen} \theta$.

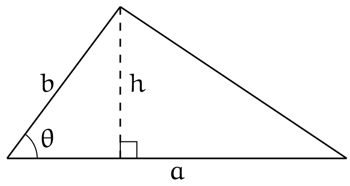


Figura 107.1

Então,

$$\frac{ah}{2} = \frac{ab \operatorname{sen} \theta}{2}.$$

108. Alturas e Pontos Médios. Sugestão: Mostre que os triângulos BME e HEN são isósceles.

Fatos que Ajudam: O ortocentro de um triângulo é o ponto de intersecção das alturas. Em um triângulo retângulo, a mediana relativa a hipotenusa tem comprimento igual a metade da hipotenusa.

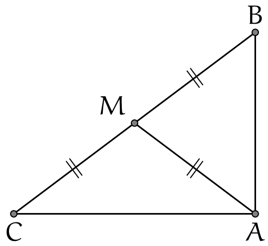


Figura 108.1

109. É Proibido usar Régua!. Sugestão: (a) Mostre que os triângulos XOP e PYO são semelhantes. (b) Tente obter o ponto C construindo triângulos equiláteros. (c) Utilize os itens (a) e (b).

Fatos que Ajudam: Dados dois pontos D e E, podemos construir um ponto F, utilizando somente compasso, tal que o $\triangle DEF$ seja equilátero. O ponto F pode ser obtido como um dos dois pontos de interseção da circunferência de centro em D que contém E e da circunferência de centro em E que contém D.

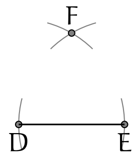


Figura 109.1

110. Pés das Perpendiculares. Sugestão: Mostre que os triângulos BEF e BCD são semelhantes.

Fatos que Ajudam: Sejam X, B e C pontos no plano tais que $B\hat{X}C = 90°$.

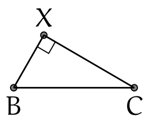


Figura 110.1

Então o ponto X está sobre a circunferência de diâmetro BC.

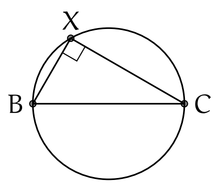


Figura 110.2

Se Y é outro ponto qualquer do arco XC, então $C\hat{X}Y = C\hat{B}Y$, porque estes ângulos medem a metade do arco YC.

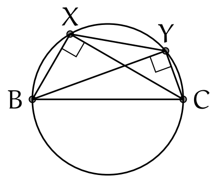


Figura 110.3

111. Jogo Triangulário. Sugestão: Observe que para uma ficha poder ser retirada ela teve que ser virada um número ímpar de vezes, e todos os círculos têm um número par de vizinhos.

112. Bolas nas Caixas. Sugestão: Existem no máximo 4 tamanhos distintos de bolas para cada cor.

113. Frações Irredutíveis. Sugestão: Sendo $a/600$ e $b/700$ as duas frações, verifique quais fatores o numerador e o denominador da soma podem ter em comum.

Fatos que Ajudam: Uma fração é dita irredutível se o numerador e o denominador não possuem fatores primos em comum.

114. Soma das Quintas Potências. Sugestão: Observe que os valores particulares de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ não são importantes e sim a quantidade destes que são iguais a 1 e -2.

115. Comendo Pizzas. Sugestão: Analise a quantidade mínima e máxima de pedaços que o grupo pode comer.

116. Quatro Cores no Tabuleiro. Sugestão: Para o item (b), verifique quantas casas de cada cor são cobertas ao colocar uma peça no tabuleiro.

117. Números no Tabuleiro 8 x 8. Sugestão: Veja o problema **Números no Tabuleiro** 4×4, do nível 1, na página 100.

118. Formigas Geométricas!. Sugestão: Analise a área do triângulo determinado pelas posições das formigas.

Fatos que Ajudam: A área de um triângulo não muda quando um dos vértices se movimenta sobre uma reta paralela à reta formada pelos outros dois vértices.

119. Ponto no Interior do Quadrado. Sugestão: Determine um ponto Q exterior ao quadrado, tal que o triângulo APB seja congruente ao triângulo CQB.

Fatos que Ajudam: Se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo e $a^2 = b^2 + c^2$, então o ângulo oposto ao lado de medida a é reto.

120. Pontos no Interior do Disco. Sugestão: Para o item (b), ordene os pontos de coordenadas inteiras em ordem crescente de distância a $(\sqrt{2}, 1/3)$.

Fatos que Ajudam: A distância entre os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dada pela expressão

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

O produto de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional.

Soluções

Nível 1

15. Aritmética

Nível 1 | Soluções

1 | Múltiplo de 9 com Algarismos Pares

Encontre o menor múltiplo de 9 que não possui algarismos ímpares.

Sugestão: Determine o valor mínimo para a soma dos algarismos do número.

Fatos que Ajudam: A soma dos algarismos de um múltiplo de 9 é divisível por 9.

Solução: Como o número é divisível por 9, a soma dos algarismos é divisível por 9.

Por outro lado, como todos os algarismos são pares, a soma dos algarismos também é par. Assim, a soma dos algarismos é no mínimo 18. O menor múltiplo de 9 com a soma dos algarismos igual a 18 é 99, mas seus algarismos são ímpares. Isto implica que o número deve ter três ou mais algarismos.

Se queremos o menor número com 3 algarismos, o primeiro algarismo deve ser no mínimo 2. Neste caso, a soma dos outros dois algarismos é igual a 16 e como são pares, a única possibilidade é 288.

Portanto, $288 = 9 \times 32$ é o menor múltiplo de 9 com todos os algarismos pares.

2 | Guardando Cubos

Uma caixa possui o formato de um bloco retangular de dimensões 102 cm, 255 cm e 170 cm. Queremos guardar nessa caixa a menor quantidade possível de pequenos cubos de aresta inteira, de forma a ocupar toda a caixa.

Sugestão: Note que a medida da aresta do cubo deve ser um divisor de cada uma das três medidas das dimensões da caixa.

(a) Qual a medida da aresta de cada bloco?

(b) Quantos blocos serão necessários?

Solução:

(a) Como a quantidade de blocos é a menor possível, a aresta do mesmo deve ser a maior possível. A medida da aresta deve ser um divisor de 102, 255 e 170. Como queremos a maior aresta possível, a medida dela deve ser igual ao $\text{mdc}(102, 255, 170) = 17$. Logo, a aresta do cubo mede 17 cm.

(b) O número de blocos é

$$\frac{102 \cdot 255 \cdot 170}{17 \cdot 17 \cdot 17} = 6 \cdot 15 \cdot 10 = 900.$$

Sugestão: Determine os possíveis valores para o produto e suas fatorações.

Fatos que Ajudam: 101 é primo.

3 | Calculadora Quebrada

Tio Mané tem uma calculadora quebrada que não tem a tecla $\boxed{0}$ e no visor nunca aparece 0 depois de alguma operação. Assim, por exemplo, se ele multiplica 3×67, obtém como resposta 21, ao invés de 201.
Tio Mané multiplicou dois números de dois algarismos em sua calculadora e obteve no visor o número 11. Quais são os possíveis números que ele multiplicou?

Solução: Como a calculadora não possui a tecla O, o produto de dois números de dois algarismos nesta calculadora é maior ou igual a $11 \times 11 = 121$ e menor que $100 \times 100 = 10000$, as possíveis respostas para o produto são: 1001, 1010 e 1100. Para cada um dos casos temos:

- $1001 = 11 \times 91 = 13 \times 77$, duas possíveis soluções;
- $1010 = 101 \times 10$ e como 101 é primo, não temos solução neste caso;
- $1100 = 11 \times 2^2 \times 5^2 = 25 \times 44$ é a única solução já que nenhum dos dois fatores pode ser divisível simultaneamente por 2 e 5.

Portanto, os possíveis produtos efetuados por Tio Mané são 11×91 ou 13×77 ou 25×44.

Sugestão: Mostre inicialmente que ele não pode ter comprado mais de 127 artigos.

4 | Loja em Quixajuba

Uma loja em Quixajuba só vende artigos com preços de R\$ $0,99$, R\$ $1,99$, R\$ $2,99$, e assim sucessivamente. Tio Mané realizou uma compra no valor total de R\$ $125,74$. Quantos artigos ele pode ter comprado?

Solução: Inicialmente observe que $\frac{125,74}{0,99} < 128$, portanto Tio Mané comprou no máximo 127 artigos. Como a compra efetuada custa 26 centavos abaixo de um valor inteiro, ele comprou ou 26 artigos, ou 126 artigos, ou 226 artigos, etc. Porém, como só adquiriu no máximo 127 artigos, então ele pode ter comprado 26 ou 126, que são quantidades possíveis de se comprar. Veja os exemplos:

- 26 artigos: 25 artigos de R\$ $0,99$ e um no valor de R\$ $100,99$.
- 126 artigos: 125 artigos de R\$ $0,99$ e um no valor de R\$ $1,99$.

5 | Números Sortudos

Dizemos que um número natural é sortudo se todos os seus dígitos são iguais a 7. Por exemplo, 7 e 7777 são sortudos, mas 767 não é. João escreveu num papel os vinte primeiros números sortudos começando pelo 7, e depois somou-os. Qual o resto da divisão dessa soma por 1000?

Sugestão: Observe que a partir do número 777, todos os números deixam o mesmo resto na divisão por 1000.

Solução: Observemos que se um número sortudo tem mais de 3 algarismos, o resto da divisão por 1000 é 777.

Assim, o resto que estamos procurando é o mesmo resto da divisão de

$$7 + 77 + \underbrace{777 + 777 + \cdots + 777}_{18 \text{ vezes}}$$

por 1000. Mas este número é

$$84 + 18 \times 777 = 84 + 13986 = 14070.$$

Assim, o resto é 70.

6 | Somando Idades

Cada pessoa de um grupo de dez pessoas calcula a soma das idades das outras nove integrantes do grupo. As dez somas obtidas foram 82, 83, 84, 85, 87, 89, 90, 90, 91 e 92.
Determine a idade da pessoa mais jovem.

Sugestão: Observe a quantidade de vezes que a idade de uma pessoa foi considerada nas dez somas.

Solução: Observe que a idade de cada pessoa aparece como parcela em 9 dos 10 números. Assim, se somarmos os 10 números obteremos nove vezes a soma de todas as idades. Portanto, a soma das idades das dez pessoas é

$$\frac{82 + 83 + 84 + 85 + 87 + 89 + 90 + 90 + 91 + 92}{9} = \frac{873}{9} = 97.$$

A pessoa mais jovem obteve a maior soma, que corresponde à soma das idades dos nove mais velhos, portanto sua idade é $97 - 92 = 5$ anos.

7 | Menor Soma Positiva

O produto de 50 números inteiros consecutivos é zero e a soma desses números é positiva. Qual o menor valor que pode assumir essa soma?

Sugestão: Se o produto dos números é igual a zero, então um dos números deve ser igual a zero.

Solução: Como o produto é igual a zero, um dos números tem de ser zero. Assim, para minimizar a soma devemos ter a maior quantidade de números negativos mas de forma que a soma ainda seja positiva.

Assim, a quantidade de números negativos deve ser menor que a quantidade de números positivos. Logo, entre os 49 números não nulos 24 são negativos e 25 são positivos. Portanto, a soma mínima é

$$-24 + (-23) + (-22) + \cdots + (-1) + 0 + 1 + \cdots + 25 =$$
$$25 + (-24 + 24) + (-23 + 23) + \cdots + (-1 + 1) + 0 = 25.$$

8 | Média dos Algarismos

Paulinho escreveu um número no quadro e depois inventou a seguinte brincadeira: escolhe dois algarismos do número que sejam ambos pares ou ambos ímpares e troca cada um deles pela sua média aritmética. Ele repete este processo quantas vezes quiser, desde que o número disponha de dois algarismos com a mesma paridade. Por exemplo, ele escreveu o número 1368 e obteve a sequência na qual foram destacados os algarismos que serão trocados no passo seguinte.

$$1\ 3\ 6\ 8 \longrightarrow 1\ 3\ 7\ 7 \longrightarrow 4\ 3\ 4\ 7 \longrightarrow 4\ 5\ 4\ 5$$

Sugestão: Observe o que ocorre com a soma dos algarismos do número quando se faz a operação descrita no problema.

Fatos que Ajudam: A média aritmética de dois números a e b é dada por

$$\frac{a+b}{2}.$$

(a) Com esta brincadeira, é possível obter o número 434434 a partir do número 324561?

(b) Paulinho escreveu o número 123456789 no quadro. Mostrar que com este processo, selecionando os números adequadamente, ele pode obter um número maior que 800000000.

Solução:

(a) Observemos que com este processo a soma dos algarismos do número não muda. Como a soma dos algarismos de 324561 é 21 e a soma dos algarismos de 434434 é 22, segue que é impossível obter 434434 a partir de 324561.

(b) Apresentamos uma sequência de passos que gera, a partir do número 123456789, um número maior que 800000000.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	2	2	4	5	6	7	8	9
3	2	2	3	5	6	7	8	9
4	2	2	3	4	6	7	8	9
5	2	2	3	4	5	7	8	9
6	2	2	3	4	5	6	8	9
7	2	2	3	4	5	6	7	9
8	2	2	3	4	5	6	7	8

9 | Sequência Numérica I

Todo termo de uma sequência, a partir do segundo, é igual à soma do anterior com a soma de seus algarismos. Os primeiros elementos da sequência são

$$1, 2, 4, 8, 16, 23, 28, 38, 49, \ldots$$

É possível que 793210041 pertença a essa sequência?

Sugestão: Analise os restos dos números da sequência quando são divididos por 3.

Fatos que Ajudam: Um número e a soma de seus algarismos deixam o mesmo resto quando divididos por 3.

Solução: Sabemos que um número e a soma de seus algarismos deixam o mesmo resto quando divididos por 3. Em cada caso, se o número deixa resto 1 na divisão por 3, então o número mais a soma de seus algarismos deixa resto 2 na divisão por 3, e se o número deixa resto dois, então a soma dele com a soma de seus algarismos deixa resto 1 porque $2 + 2 = 4$ deixa resto 1.

Calculando os restos da sequência quando dividimos por 3, obtemos uma nova sequência

$$1, 2, 1, 2, 1, \ldots,$$

isto é, uma sequência periódica onde aparecem unicamente os restos 1 e 2. Como o número 793210041 é divisível por 3, então ele não pertence à sequência.

10 | Estrelas em Geometrix

Estrelix, um habitante de Geometrix, decidiu colocar os inteiros positivos seguindo a disposição indicada na figura.

Sugestão: Separe as estrelas deixando os números compartilhadas sempre na estrela à direita.

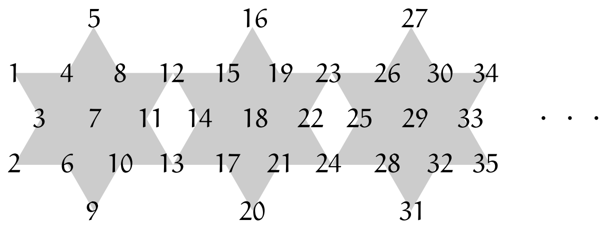


Figura 10.1

Em quais estrelas aparece o número 2011? Posicione todos os números que aparecem nas referidas estrelas.

Solução: Consideremos que cada estrela tem em sua composição 11 números e outros dois números, que serão contados na estrela seguinte, conforme a figura 10.2. Dividindo 2011 por 11, obtemos quociente 182 e resto 9. Assim, o número 2011 é o nono número da 183ª estrela, que está representada na figura 10.3.

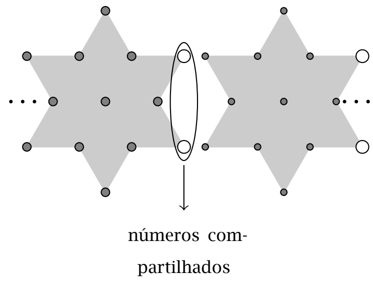


Figura 10.2

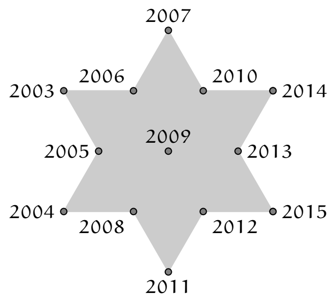


Figura 10.3

11 | Bandeira do Tio Mané

O Tio Mané é torcedor doente do Coco da Selva Futebol Clube e resolveu fazer uma bandeira para apoiar seu time no jogo contra o Desportivo Quixajuba. Para isso, comprou um tecido branco retangular com 100 cm de largura e 60 cm de altura. Dividiu dois de seus lados em 5 partes iguais e os outros dois em 3 partes iguais, marcou o centro do retângulo e pintou o tecido da forma indicada na figura 11.1.

Sugestão: Trace as diagonais do retângulo e calcule a área das quatro partes determinadas.

Fatos que Ajudam: Triângulos com a mesma base e a mesma altura têm áreas iguais.

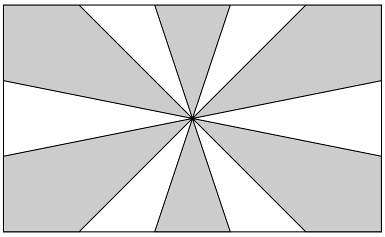


Figura 11.1

Qual é a área do tecido que Tio Mané pintou?

Solução: As diagonais da Bandeira dividem-na em 4 triângulos de área $60 \times 100/4 = 1500$ cm^2 cada um.

Estas diagonais dividem a Bandeira em dois tipos de triângulo, como mostrados nas figuras 11.3 e 11.4.

O triângulo do tipo 11.3 está dividido em 5 triângulos de mesma área porque possuem mesma base e altura. Assim, a área pintada no triângulo da figura 11.3 é $(1500/5) \times 3 = 900$ cm^2.

O triângulo da figura 11.4 está dividido em 3 triângulos de igual área. Logo, a área pintada nesse triângulo é $(1500/3) \times 2 = 1000$ cm^2.

Deste modo, a área total pintada da bandeira é

$$2 \times (900 + 1000) = 3800 \text{ cm}^2.$$

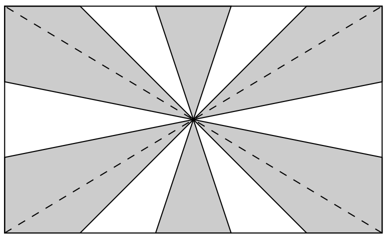


Figura 11.2

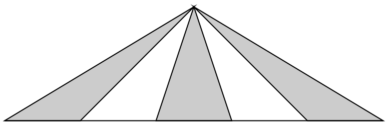


Figura 11.3

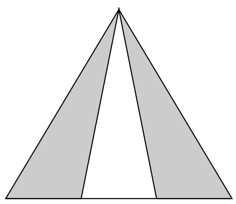


Figura 11.4

12 | Abelha na Flor

Sugestão: Determine a medida do lado do quadrado.

As flores de Geometrix têm formatos muito interessantes. Algumas delas possuem a forma mostrada na figura 12.1, na qual há seis quadrados e doze triângulos equiláteros.

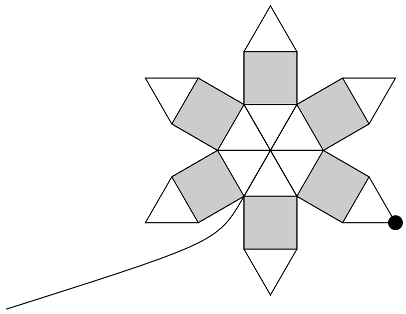


Figura 12.1

Uma abelha pousou no ponto destacado e andou sobre a borda da flor no sentido horário até voltar ao ponto inicial. Sabendo que a região cinza tem 24 cm^2 de área, qual é a distância percorrida pela abelha?

Solução: A área destacada corresponde à soma das áreas de seis quadrados. Portanto, cada quadrado possui 4 cm^2 de área e lado 2 cm.

Os lados dos quadrados e dos triângulos equiláteros são todos iguais. Uma volta completa da abelha em torno da flor corresponde a 24 vezes o lado do quadrado, ou seja, 48 cm.

13 | Ângulo da Asa Delta

Sugestão: Mostre que os triângulos ABC e ADC são iguais.

Fatos que Ajudam: A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Na figura 13.1, temos dois triângulos, ABC e ADC tais que $AB = AD$ e $CB = CD = CA$. Sabendo que $C\hat{B}A = 25°$, determine a medida do ângulo $B\hat{C}D$.

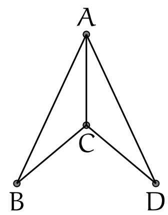


Figura 13.1

Solução: Observe que os triângulos ABC e ADC são iguais e isósceles, pois os três lados de cada triângulo possuem as mesmas medidas.

Por outro lado,

$$C\hat{B}A = B\hat{A}C = C\hat{A}D = A\hat{D}C = 25°.$$

Daí,

$$B\hat{C}A = D\hat{C}A = 180° - 25° - 25° = 130°.$$

Finalmente

$$B\hat{C}D = 360° - 130° - 130° = 100°.$$

14 | Azulejos de Pedro

Pedro é um pedreiro. Ele tem um grande número de azulejos de três tipos, como mostrado abaixo:

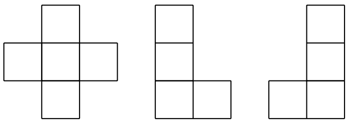


Figura 14.1

O menor lado de cada azulejo mede 10 cm. Ele quer ladrilhar completamente uma bancada de uma cozinha sem cortar qualquer azulejo.

(a) Mostre como ele poderá alcançar seu objetivo se a bancada for um retângulo 60 cm $\times$ 50 cm.

(b) Mostre como ele poderá alcançar seu objetivo se a bancada for um quadrado 60 cm $\times$ 60 cm.

Sugestão: Perceba que deve haver uma peça em **L** cobrindo cada canto da bancada. Além disso, calcule quantas peças de cada tipo são necessárias para cobrir a área de cada bancada.

Solução:

(a) A solução é exibida na figura 14.2.

(b) A solução é exibida na figura 14.3.

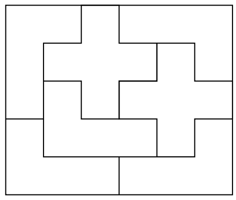


Figura 14.2

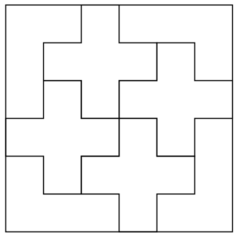


Figura 14.3

15 | Retângulo 9 x 4

(a) Divida um retângulo 9×4 em três peças e remonte-as de modo a formar um quadrado 6×6.

(b) Divida um retângulo 9×4 em duas peças e remonte-as de modo a formar um quadrado 6×6.

Solução:

(a) Dividimos o retângulo 9×4 em dois retângulos 2×3 e um retângulo 4×6 como mostra a figura 15.1 e os reagrupamos como ilustra a figura 15.2, formando um quadrado 6×6. Veja as figuras 15.1 a 15.3.

(b) Dividimos o retângulo em duas figuras iguais e em forma de L e as reagrupamos, como ilustram as figuras 15.3 e 15.4.

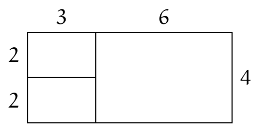


Figura 15.1

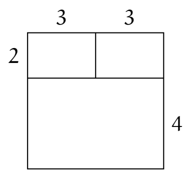


Figura 15.2

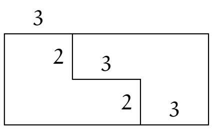


Figura 15.3

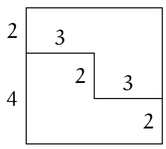


Figura 15.4

Comentário: A solução de (b) leva a infinitas soluções para (a). Para tal, basta dividir uma das duas peças de (b) em duas quaisquer, obtendo três peças.

16 | Plantando Jasmins

Sugestão: Trace um segmento de reta ligando os pontos médios relatados no problema.

Fatos que Ajudam: Traçando uma diagonal de um retângulo, este fica dividido em dois triângulos de mesma área.

O jardineiro Jacinto decidiu ajardinar um canteiro retangular com 10 m^2 de área. Dividiu o canteiro traçando uma diagonal e unindo cada um dos pontos médios dos lados maiores com um vértice do lado oposto, como indicado na figura.

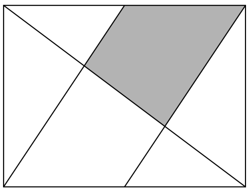


Figura 16.1

Na região sombreada plantou jasmins. Qual a área dessa região?

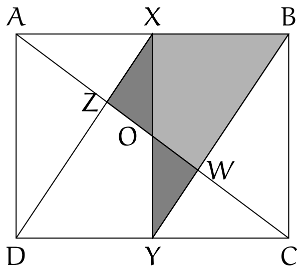


Figura 16.2

Solução: Sejam $ABCD$ o canteiro e X e Y os pontos médios de AB e CD, respectivamente, como na figura 16.2. O ponto de interseção da reta XY e da diagonal AC determina o centro O do retângulo.

Como a figura é simétrica em relação ao centro O, em particular temos que os triângulos XZO e YWO são iguais.

Concluímos que a área do quadrilátero $XZWB$ é igual à área do triângulo XYB que corresponde a $1/4$ da área do retângulo $ABCD$, isto é, $2,5$ m^2.

17 | Tangram

Sugestão: Determine a que fração da área do tangram corresponde cada uma das peças.

A figura 17.2 é um retângulo cuja área sombreada foi feita utilizando peças de um *tangram* que formam um quadrado de 10 cm^2 de área, mostrado na figura 17.1.

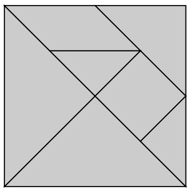


Figura 17.1

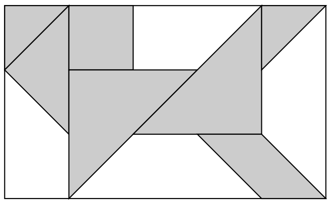


Figura 17.2

Qual é a área do retângulo?

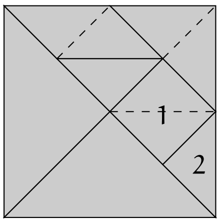


Figura 17.3

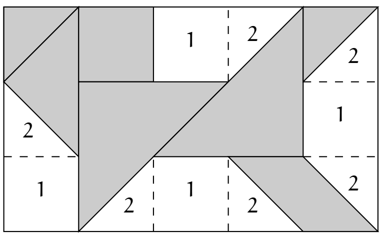


Figura 17.4

Solução:

No tangram temos: dois triângulos maiores de área $1/4$ do quadrado, isto é, $10/4$ cm^2; um triângulo, um quadrado e um paralelogramo de área $1/8$ do quadrado, isto é, $10/8$ cm^2 e dois triângulos de área $1/16$ do quadrado, isto é, $10/16$ cm^2.

Na decomposição mostrada na figura 17.4, o retângulo formado possui, além das peças do tangram, quatro quadrados de área $10/8$ cm^2 e seis triângulos de área $10/16$ cm^2, numa área total de

$$4 \times \frac{10}{8} + 6 \times \frac{10}{16} = \frac{35}{4} \text{ cm}^2.$$

Finalmente, a área do retângulo é

$$10 + \frac{35}{4} = \frac{75}{4} = 18,75 \text{ cm}^2.$$

18 | Triângulo Isósceles I

Seja ABC um triângulo com $B\hat{A}C = 30°$ e $A\hat{B}C = 50°$. A reta ℓ corta os lados AB, BC e o prolongamento de AC em D, E e F, respectivamente.

Sugestão: Considere três casos dependendo de quais dos lados do triângulo BDE são iguais.

Fatos que Ajudam: A soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$. Triângulo isósceles é aquele que tem dois lados iguais e, portanto, também tem dois ângulos internos iguais.

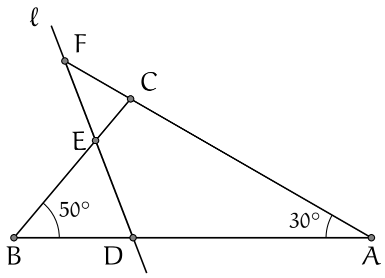


Figura 18.1

Se o triângulo BDE é isósceles, quais são as três possíveis medidas para o ângulo $C\hat{F}E$?

Solução: Sabemos que $B\hat{C}A = 180° - 50° - 30° = 100°$ e $E\hat{C}F = 80°$. Assim, basta calcular a medida do ângulo $C\hat{E}F$ para depois calcular a medida do ângulo $C\hat{F}E$. Temos três possíveis casos, dependendo quais dos três lados do triângulo BDE são iguais:

(a) Se $BD = BE$, temos que

$$B\hat{D}E = B\hat{E}D = \frac{180° - 50°}{2} = 65°$$

e

$$C\hat{F}E = 180° - 80° - 65° = 35°.$$

(b) Se $BD = DE$, temos que

$$B\hat{E}D = D\hat{B}E = 50°$$

e

$$C\hat{F}E = 180° - 80° - 50° = 50°.$$

(c) Se $DE = BE$, temos que

$$B\hat{D}E = D\hat{B}E = 50°,$$

$$B\hat{E}D = 180° - 50° - 50° = 80°$$

e

$$C\hat{F}E = 180° - 80° - 80° = 20°.$$

19 | Formando um Retângulo

Sugestão: Divida o retângulo maior em quadrados.

A partir de seis retângulos iguais e cinco quadrados iguais é formado um retângulo de perímetro 324 cm, como mostrado na figura 19.1

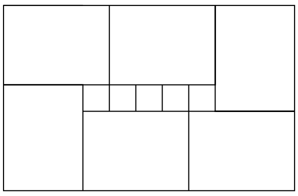


Figura 19.1

Determine a área do retângulo construído.

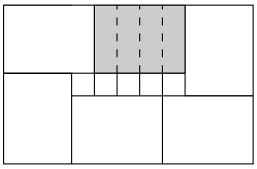


Figura 19.2

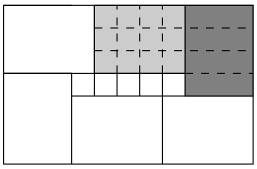


Figura 19.3

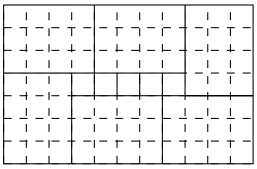


Figura 19.4

Solução: Do retângulo cinza destacado na figura 19.2, concluímos que um dos lados do retângulo mede 4 vezes o lado do quadrado.

Assim, o outro lado do retângulo mede 3 vezes o lado do quadrado (veja a figura 19.3). Segue que podemos dividir o retângulo em quadrados, como indicado na figura 19.4.

Desta forma, temos que o retângulo fica dividido em $11 \times 7 = 77$ quadrados. O perímetro deste retângulo é $11 + 11 + 7 + 7 = 36$ vezes o lado do quadrado. Portanto o lado do quadrado é $324/36 = 9$ cm e a área do retângulo é $11 \times 7 \times 9^2 = 6237$ cm^2.

20 | Construindo uma Pipa

Para construir a pipa de papel representada na figura, Eduardo começou por pintar um retângulo $ABCD$ numa folha de papel. Em seguida, prolongou cada um dos lados do retângulo triplicando o seu comprimento e obteve o quadrilátero $A'B'C'D'$.

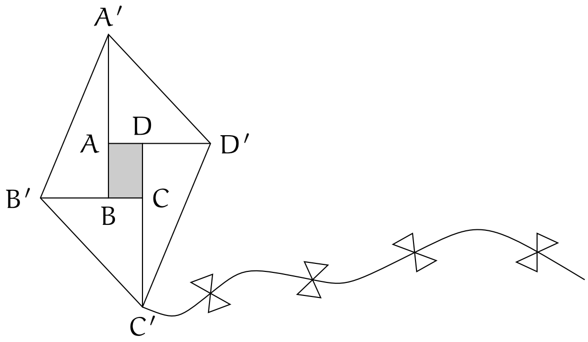


Figura 20.1

Sabendo que a área do retângulo $ABCD$ é 200 cm^2, qual é a área da pipa construída por Eduardo?

Sugestão: Mostre que a área de cada um dos quatro triângulos é igual ao triplo da área do retângulo $ABCD$.

Fatos que Ajudam: Construindo uma diagonal de um retângulo, este fica dividido em dois triângulos de mesma área.

Solução: Observe que os triângulos $AA'D'$ e $CC'B'$ são iguais. De igual forma os triângulos $BB'A'$ e $DD'C'$ são iguais.

Assim, se X e Y são pontos tais que $A'BB'X$ e $A'AD'Y$ são retângulos (figura 20.2), a área da pipa é igual à soma das áreas destes retângulos mais a área do retângulo $ABCD$ e cada um destes retângulos pode ser dividido em $3 \times 2 = 6$ retângulos iguais a $ABCD$.

Concluímos que a pipa tem área $(6 + 6 + 1) \times 200 = 2600 \text{ cm}^2$.

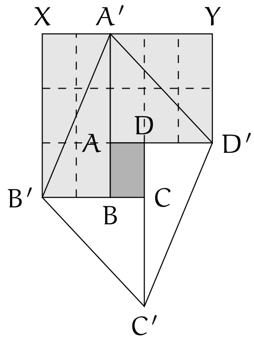


Figura 20.2

17. Diversos

Nível 1 | Soluções

21 | Colorindo Mapas

No mapa da figura 21.1 a curva XY é uma das fronteiras. Países como I e II têm fronteira comum. O ponto Y não é considerado fronteira, ou seja, países como I e V não têm fronteira comum. Você deve colorir o mapa fazendo países de fronteira comum terem cores diferentes.

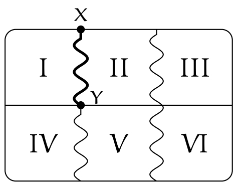


Figura 21.1

(a) Qual é o número mínimo de cores para colorir o mapa? Mostre como colori-lo.

(b) Desenhe outro mapa de 6 países, que precise de pelo menos 4 cores para ser pintado. Mostre como colori-lo com cores A, B, C e D.

Solução:

(a) No mínimo são necessárias duas cores, como mostrado na figura 21.2.

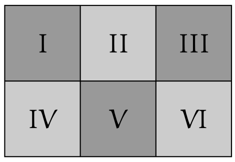


Figura 21.2

(b) As figuras 21.3 e 21.4 exibem dois mapas com seis países que precisam de no mínimo quatro cores para serem pintados.

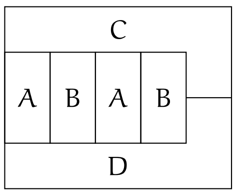


Figura 21.3

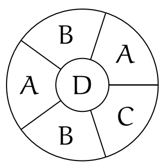


Figura 21.4

22 | De Coco da Selva a Quixajuba

As cidades de *Coco da Selva* e *Quixajuba* estão ligadas por uma linha de ônibus. De Coco da Selva saem ônibus para Quixajuba de hora em hora e o primeiro parte à meia-noite em ponto. De Quixajuba saem ônibus para Coco da Selva de hora em hora e o primeiro parte à meia-noite e meia em ponto. A viagem de ônibus é feita em exatamente 5 horas.
Se um ônibus sai de Coco da Selva ao meio-dia, quantos ônibus vindo de Quixajuba ele encontra durante o percurso?

Solução: Observemos que o ônibus que parte de Coco da Selva para Quixajuba encontra os ônibus que, no momento de sua saída, estão no caminho de Quixajuba para Coco da Selva e mais os ônibus que partem nas cinco horas seguintes.

Os ônibus que estão na estrada são aqueles que partiram até 5 horas antes desse ônibus, enquanto os ônibus que ainda vão partir têm de fazê-lo até 5 horas depois. Assim o ônibus se encontrará com todos aqueles que partiram de Quixajuba entre 7h 30min e 16h 30 min, que são 10.

23 | O Baralho de João

João possui um baralho com 52 cartas numeradas de 1 até 52. Um conjunto de três cartas é chamado *sortudo* se a soma dos algarismos em cada carta é a mesma. Qual é o número mínimo de cartas que João tem de pegar do baralho, sem olhar, de tal forma que entre as cartas que ele pegou necessariamente existam três cartas que formam um conjunto de cartas sortudo?

Solução: Primeiro observemos que a soma dos algarismos das cartas é no máximo $4+9=13$ o que somente acontece com a carta 49. Já para as somas que estão entre 1 e 12, há pelo menos duas cartas que satisfaçam cada soma, assim pegando a carta 49 mais duas cartas para cada soma entre 1 e 12 , isto é, $2 \times 12 + 1 = 25$ cartas, ainda não temos três cartas que formam um conjunto sortudo.

Agora, se pegamos 26 cartas, no mínimo 25 têm soma de seus algarismos entre 1 e 12. Logo, pelo menos, 3 cartas têm a mesma soma dos algarismos.

24 | Moedas e Pesagens

Sugestão: Divida as moedas em três grupos de 16 moedas.

Ana possui 48 moedas aparentemente iguais. Porém, exatamente uma das moedas é falsa e tem peso diferente do peso das outras. Ela possui uma balança eletrônica que mede o peso total de qualquer quantidade de moedas. Mostre como ela pode determinar a moeda falsa realizando sete pesagens.

Solução: Dividimos as 48 moedas em três grupos de 16 moedas e realizamos três pesagens. A moeda falsa estará no grupo de peso diferente.

Além disso, já é possível determinar o peso da moeda falsa e das moedas *boas*.

Pegamos o grupo de 16 moedas que contém a moeda falsa e dividimos em dois grupos de 8. Escolhemos um grupo e o pesamos. Como sabemos qual é o peso que devemos obter se a moeda é falsa ou boa, podemos determinar se a moeda está nesse grupo ou no grupo que não foi pesado.

Pegamos novamente o grupo que contém a moeda falsa, dividimos em dois grupos com a mesma quantidade de moedas e pesamos um dos grupos. Realizando mais quatro vezes este processo, até pesar uma única moeda, podemos determinar a moeda falsa.

Deste modo, precisamos de três pesagens iniciais e mais quatro pesagens dividindo os grupos pela metade. Ao todo, precisamos de sete pesagens.

25 | Distribuindo Maçãs

Noventa e nove maçãs são distribuídas entre alguns garotos de tal forma que todos recebem quantidades diferentes de maçãs.

Sugestão: Para maximizar o número de garotos temos de minimizar o número de maçãs que cada um recebe.

(a) Qual o número máximo de garotos que pode haver nesse grupo?

(b) Havendo dez garotos, qual o número máximo de maçãs que recebe o garoto que ganhou menos maçãs?

Solução:

(a) Para maximizar o número de garotos temos de minimizar o número de maçãs que cada um pode receber. Neste caso, os primeiros números naturais $1, 2, 3, 4, \ldots,$ correspondem às quantidades de maçãs que cada garoto deverá receber, exceto o último garoto.

Como
$$1 + 2 + 3 + \cdots + 12 + 13 = 91$$
e
$$1 + 2 + 3 + \cdots + 13 + 14 = 105,$$
o número máximo de garotos é 13.

(b) Observemos que
$$1 + 2 + \cdots + 10 = 55$$
é o número mínimo de maçãs que recebem os dez garotos. Para cada maçã que damos ao garoto com menor número de maçãs, temos de dar uma maçã a cada um dos outros para que todos fiquem com quantidades distintas de maçãs.

Como $99 - 55 = 44$ podemos dar 4 maçãs a mais para todos os garotos. Portanto, o garoto com menos maçãs pode receber no máximo 5 maçãs (Observe que $5+6+\cdots+14 = 95$ e $6+7+\cdots+15 = 105$).

26 | Maria e seus Convidados

Maria convidou nove garotos e oito garotas para sua festa de aniversário. Ela preparou camisetas com os números de 1 a 18, ficou com a de número 1 e distribuiu as demais para seus convidados. Durante uma dança, ela observou que a soma dos números de cada casal era um quadrado perfeito. Quais pares estavam dançando?

Sugestão: Determine inicialmente o maior quadrado perfeito que é a soma de dois números dentre os citados.

Solução: Observe inicialmente que a maior soma possível para um casal é $18 + 17 = 35 < 6^2$, donde obtemos os pares $\{18, 7\}$, $\{17, 8\}$ e $\{16, 9\}$. Consideremos agora dois casos:

- O par do 15 é o 10.

  Segue que o par do 6 é o 3 e não há escolha para o par do 1.

- O par do 15 é o 1.

  Segue que o par do 10 é o 6, o par do 2 é o 14, o par do 3 é o 13, o par do 12 é o 4 e o par do 5 é o 11. Portanto, existe somente uma solução:

$$\{1, 15\}, \{2, 14\}, \{3, 13\}, \{4, 12\}, \{5, 11\}, \{6, 10\}, \{7, 18\}, \{8, 17\}, \{9, 16\}.$$

27 | Cartões de Apostas

Sugestão: Comece comparando os cartões de A e de B.

Três apostadores A, B e C preenchem individualmente um cartão de apostas, dos possíveis resultados de cinco jogos de futebol (C = vitória do time da casa, E = empate, V = vitória do visitante). Os cartões preenchidos foram:

	C	E	V
1	×		
2	×		
3		×	
4		×	
5			×

Apostador A

	C	E	V
1			×
2		×	
3	×		
4		×	
5	×		

Apostador B

	C	E	V
1	×		
2	×		
3			×
4	×		
5		×	

Apostador C

Finalizadas as partidas, observou-se que A obteve três acertos, B obteve três acertos e C obteve dois acertos. Construa um cartão com cinco acertos.

Solução: A e B obtiveram juntos 6 acertos, mas só há 5 jogos, logo houve pelo menos um jogo em que ambos acertaram. Comparando seus cartões, apenas no jogo 4 houve respostas iguais. Logo, esse jogo está certo e dos outros quatro jogos, A acertou 2 e B acertou outros 2.

	C	E	V
1	×		
2	×		
3	×		
4		×	
5	×		

Comparando o cartão do B com o cartão do C, em todos os jogos suas respostas foram diferentes, então os 2 acertos de C também são acertos de A. Mas os cartões de A e C unicamente coincidem nos jogos 1 e 2, que devem ser os resultados corretos dos jogos. Portanto os jogos 3 e 5 foram acertados por B, obtendo a tabela ao lado.

28 | Números de 1 a 16

Sugestão: Encontre todos os possíveis vizinhos do número 16.

(a) Mostre que os números de 1 a 16 podem ser escritos numa reta, de tal modo que a soma de quaisquer dois números vizinhos seja um quadrado perfeito.

(b) Mostre que os números de 1 a 16 não podem ser escritos ao redor de uma circunferência, de tal modo que a soma de quaisquer dois números vizinhos seja um quadrado perfeito.

Solução: A observação-chave que ajuda a resolver (a) e resolve (b) é procurar os possíveis vizinhos para o número 16.

Um vizinho de 16 é um número que somado a 16 resulte em um quadrado perfeito. Um candidato é o número 9, pois $16+9=5^2$.

Não existem outros, pois o próximo quadrado perfeito após o 25 é o 36 e a maior soma que podemos obter dentre dois números de 1 a 16 é $15+16=31$.

(a) Como o 16 só tem um vizinho possível, ele deve ficar numa extremidade. Começando com o 16 obtemos a solução abaixo.

$$16-9-7-2-14-11-5-4-12-13-3-6-10-15-1-8$$

(b) Para que fosse possível colocar todos os números de 1 a 16 ao redor de uma circunferência, todo número deveria ter dois vizinhos. Mas o único vizinho possível para o 16 é 9, impossibilitando a construção circular.

29 | Calculando Somas

Considere um tabuleiro com 11 linhas e 11 colunas.

Sugestão: Observe que as duas regiões formadas são iguais. No item (c), conte as casas de cada peça por linha.

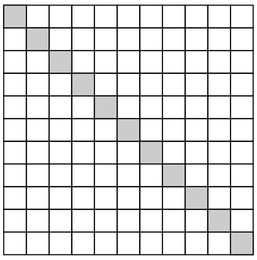


Figura 29.1

(a) Quantas casas formam este tabuleiro?

(b) A diagonal cujas casas estão sombreadas separa o tabuleiro em duas regiões: uma acima e outra abaixo. Quantas casas formam cada região? É possível calcular esse número sem contar casa por casa?

(c) Com a ajuda do tabuleiro, é possível calcular a soma $1+2+\cdots+10$. Explique como.

(d) Com a ajuda de outro tabuleiro, com o raciocínio semelhante ao do item anterior, é possível calcular a soma $1+2+\cdots+100$. Qual deve ser a quantidade de linhas e colunas do tabuleiro? Qual o valor da soma?

Solução:

(a) Como há 11 casas em cada linha do tabuleiro e este possui 11 linhas, o total de casas é $11 \times 11 = 121$.

(b) Como há uma casa da diagonal em cada linha do tabuleiro e este possui 11 linhas, o total de casas da diagonal é 11. Por outro lado, a diagonal é um eixo de simetria, separando duas regiões iguais. Existem 11×11 casas no tabuleiro e destas 11 estão na diagonal. O número de casas que formam cada região é então $(11 \times 11 - 11)/2 = 55$.

(c) Vamos contar o número de casas em cada peça por linha (veja a figura 29.2). A primeira linha contém 1 casa, a segunda 2, a terceira 3 e assim por diante, até a última linha, que contém 10 casas. Portanto, a soma $1+2+\cdots+10$ é o total de casas de cada peça, as quais contêm 55 casas:

$$1+2+\cdots+10 = \frac{11 \times 11 - 11}{2} = 55.$$

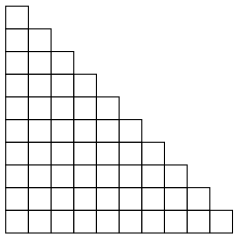


Figura 29.2

(d) Vamos considerar um tabuleiro com 101 linhas e 101 colunas e considerar a diagonal que o separa em duas regiões iguais. A diagonal contém 101 casas e cada região contém $(101 \times 101 - 101)/2 = 5050$ casas. Por outro lado, contando o número de casas por linha, obtemos $1+2+\cdots+100$. Portanto,

$$1+2+\cdots+100 = 5050.$$

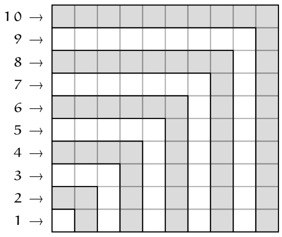


Figura 29.3

Problema Relacionado

Considere o tabuleiro com 10 linhas e 10 colunas, da figura 29.3. Ele está dividido em dez peças no formato coloridas alternadamente de branco e cinza. A primeira peça é formada somente por uma casa.

(a) Quantas casas formam a sétima peça? E a décima peça?

(b) É possível calcular a soma $1 + 3 + \cdots + 19$ com a ajuda deste tabuleiro. Como?

(c) Com um raciocínio semelhante a este e com o auxílio de outro tabuleiro é possível calcular a soma $1+3+5+\cdots+99$. Quantas linhas e colunas deve ter o tabuleiro? Qual o valor da soma?

30 | Herança para Cinco Filhos

Divida a figura 30.1 em cinco partes do mesmo formato e com áreas iguais de tal modo que cada parte contenha exatamente um quadrado cinza.

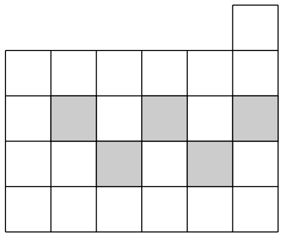


Figura 30.1

Solução: A figura 30.2 mostra a solução do problema.

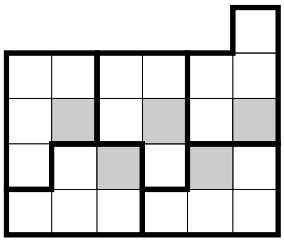


Figura 30.2

18. Desafios

Nível 1 | Soluções

31 | Vizinhos e Distantes

É possível escrever os números naturais de 1 a 100 sobre uma reta de modo que a diferença entre quaisquer dois números vizinhos seja maior ou igual a 50?

Sugestão: Analise os possíveis vizinhos do número 50 e do número 51.

Solução: Observe que o único vizinho possível para o 50 é o número 100 e o único vizinho possível para o número 51 é o número 1. Portanto, 50 e 51 devem aparecer nas extremidades da configuração.

Começando por 51, obtemos a configuração.

$$51 \to 1 \to 52 \to 2 \to 53 \to \cdots \to 100 \to 50.$$

É possível demonstrar que esta configuração e a que contém os números na ordem inversa, são as únicas possíveis.

De fato, os únicos possíveis vizinhos de 52 são o 1 e o 2, logo os vizinhos de 1 são 51 e 52. Como 1 não é vizinho de 53, então os únicos possíveis vizinhos de 53 são 2 e 3.

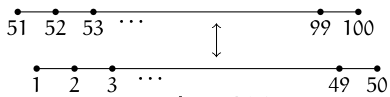


Figura 31.1

Do mesmo modo descobrimos que os únicos vizinhos possíveis de 54 são o 3 e o 4 (pois o 2 e o 1 já têm vizinhos) e continuando esse processo mostramos que esta é a única sequência possível.

Observe que a configuração é formada intercalando os números dos conjuntos $\{51, 52, \ldots, 100\}$ e $\{1, 2, \ldots 50\}$.

32 | Truque com Cartas

Um mágico com os olhos vendados dá 29 cartas numeradas de 1 a 29 para uma mulher da plateia. Ela esconde duas cartas no bolso e devolve as restantes para a assistente do mágico.
A assistente escolhe duas cartas dentre as 27 e um homem da plateia lê, na ordem que quiser, o número destas cartas para o mágico. Após isto, o mágico adivinha o número das cartas que foram escondidas pela mulher.
Como o mágico e sua assistente podem combinar uma estratégia para realizarem esse truque?

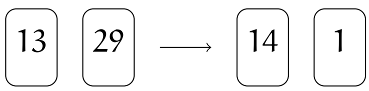


Figura 32.1

Solução: Existem várias estratégias possíveis. Vamos apresentar uma.

Separemos em dois casos:

- Primeiro Caso: A mulher escolheu duas cartas não consecutivas (estamos supondo que 29 e 1 são consecutivos). Nesse caso, a assistente escolhe as duas cartas posteriores às escolhidas pela mulher.

- Segundo Caso: A mulher escolheu duas cartas consecutivas. Nesse caso, a assistente escolhe as duas cartas posteriores à maior carta. No caso em que a mulher escolhe as cartas 29 e 1, a assistente pega as cartas 2 e 3.

Para realizar o truque, o mágico precisa somente dizer as duas cartas anteriores em qualquer dos casos.

33 | Campeonato de Quixajuba

Sugestão: O número máximo de pontos no campeonato é três vezes a quantidade de jogos. A cada empate, este número diminui em uma unidade.

A tabela mostra a classificação final do campeonato de futebol de Quixajuba. Neste campeonato cada time jogou com cada um dos outros **quatro** vezes. Cada time ganha 3 pontos por vitória, 1 por empate e não ganha pontos em caso de derrota.

Equipe	Pontos
Bissetriz	22
Primo	19
Potência	14
MDC	12

(a) Quantas partidas foram disputadas no campeonato?

(b) Quantas partidas terminaram empatadas?

Solução:

(a) Existem 6 possíveis confrontos entre os quatro times (Bissetriz $\times$ Primo), (Bissetriz $\times$ Potência), (Bissetriz $\times$ MDC), (Primo $\times$ Potência), (Primo $\times$ MDC) e (Potência $\times$ MDC). Cada um destes confrontos aconteceu 4 vezes e logo o número de partidas é igual a $4 \times 6 = 24$.

(b) O número máximo de pontos do campeonato é igual a 3 vezes o número de jogos, isto é, $3 \times 24 = 72$. Cada vez que acontece um empate este número diminui uma unidade. Como o número total de pontos ao final do campeonato foi $22 + 19 + 14 + 12 = 67$, o número de partidas que terminaram empatadas é $72 - 67 = 5$.

34 | Tabuleiro 6 x 6

Você dispõe de doze peças em formato de L, como a mostrada na figura 34.1. Cada figura é formada por três quadrados de lado 1. Mostre como cobrir um quadrado 6×6 com essas peças, de modo que nenhum retângulo 2×3 seja formado por exatamente duas de tais peças.

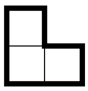


Figura 34.1

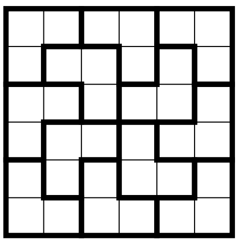


Figura 34.2

Solução: A figura 34.2 exibe uma possível divisão.

35 | Somando Algarismos

Quantos números naturais de três algarismos são tais que a soma destes é igual a 24?

Sugestão: Observe que todos os algarismos não podem ser menores que 8.

Solução: Se todos os algarismos forem menores que 8, a soma será menor que $3 \times 8 = 24$.

Se um deles for igual a 8, a soma dos outros dois será 16 e temos as possibilidades: $16 = 8 + 8 = 7 + 9$. Obtemos então sete soluções *888*, *789*, *798*, *879*, *897*, *978* e *987*.

Se um dos algarismos for igual a 9, a soma dos outros dois será 15 e temos as possibilidades: $15 = 7 + 8 = 6 + 9$. A primeira igualdade leva a soluções já encontradas. A outra resulta nos números *699*, *969* e *996*.

Existem então dez naturais com a propriedade desejada: *888*, *789*, *798*, *879*, *897*, *978*, *987*, *699*, *969* e *996*.

36 | Contando Quadrados

Doze pontos são marcados sobre uma grade de pontos, como mostrado na figura 36.1.

Sugestão: Verifique que existem quadrados inclinados, de dois tamanhos diferentes.

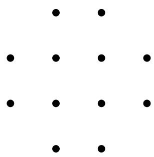


Figura 36.1

Quantos quadrados podem ser formados ligando quatro desses pontos?

Solução: No total existem 11 quadrados, como indicado abaixo.

- 5 quadrados pequenos, como na figura 36.2.
- 4 quadrados maiores, como na figura 36.3.
- E 2 quadrados maiores ainda, mostrados na figura 36.4.

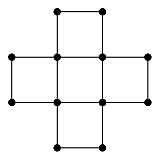


Figura 36.2

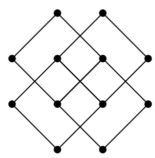


Figura 36.3

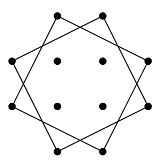


Figura 36.4

37 | A Moeda Falsa

Temos 25 moedas aparentemente iguais, mas sabemos que exatamente uma delas é falsa e tem o peso diferente do peso das outras.
Não sabemos qual é a moeda falsa. Todas as outras 24 moedas possuem o mesmo peso.
Queremos determinar, utilizando uma balança de pratos, se a moeda falsa é mais leve ou mais pesada que as outras.
Como podemos alcançar este objetivo realizando **duas pesagens** em uma balança de pratos?

- Não queremos encontrar a moeda falsa. Queremos saber se ela é mais leve ou mais pesada que as outras.
- Nesse tipo de balança podemos comparar os pesos colocados nos dois pratos, ou seja, a balança pode equilibrar ou pender para o lado mais pesado.

Solução: Separe uma das moedas e coloque as outras 24 na balança, com 12 em cada prato. Temos duas possibilidades:

(1) A balança equilibra. Neste caso, concluímos que a moeda falsa é a que não está na balança e todas as que estão na balança são verdadeiras. Basta realizar uma nova pesagem com a moeda falsa e uma outra moeda qualquer.

(2) A balança não equilibra. Pegamos as 12 moedas do prato mais leve e colocamos novamente na balança com 6 moedas em cada prato. Temos novamente dois casos.

  (a) Se a balança equilibrar, então todas as 12 moedas são verdadeiras e podemos concluir que a moeda falsa era uma das outras 12 do grupo mais pesado. Portanto, neste caso, a moeda falsa é mais pesada.

  (b) Se a balança não equilibrar, a moeda falsa é uma destas 12 moedas e como este grupo é mais leve que o outro, concluímos que a moeda falsa é mais leve.

38 | O Tabuleiro Mutilado

Sugestão: Cada peça do dominó sempre cobre uma casa preta e uma casa branca.

A figura abaixo mostra um tabuleiro 8×8 no qual duas casas foram retiradas (a do canto inferior direito e a do canto superior esquerdo). É possível cobrir este tabuleiro com 31 dominós 2×1? Cada dominó pode ser colocado na horizontal ou na vertical cobrindo exatamente duas casas.

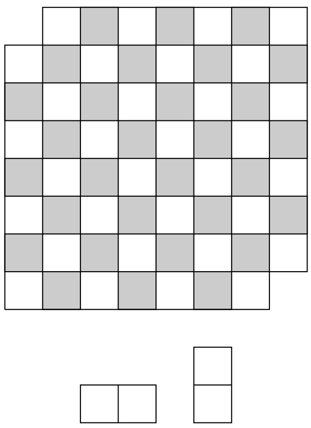


Figura 38.1

Solução: Cada vez que colocamos uma peça de dominó no tabuleiro, cobrimos uma casa branca e uma casa preta. Deste modo, o número de casas pretas cobertas é igual ao número de casas brancas cobertas.

Como nosso tabuleiro tem 30 casas pretas e 32 casas brancas, não é possível colocarmos 31 dominós.

39 | Dividindo um Retângulo

(a) É possível dividir um retângulo 39×55 em retângulos 5×11?

(b) É possível dividir um retângulo 55×27 em retângulos 5×11?

Sugestão: Analise a possibilidade de se obter 39 e 27 como soma de várias parcelas 5 e 11.

Solução:

(a) Suponha que seja possível fazer tal divisão. O lado de medida 39 será então escrito como soma de múltiplos de 5 e 11. É claro que serão utilizadas no máximo 3 parcelas 11. Vamos analisar as possibilidades:

(1) Não é possível usar somente múltiplos de 5 porque 39 não é divisível por 5.

(2) Não é possível usar um 11 porque $39 - 11 = 28$ não é divisível por 5.

(3) Não é possível usar duas parcelas 11 porque $39 - 2 \times 11 = 17$ não é divisível por 5.

(4) Não é possível usar três parcelas 11 porque $39 - 3 \times 11 = 6$ não é divisível por 5.

Logo, não é possível dividir um retângulo 39×55 em retângulos 5×11.

(b) Já no caso do retângulo 55×27 podemos escrever

$$27 = 5 + 11 + 11.$$

Como o lado de medida 55 pode ser coberto tanto por 5 lados de medida 11 quanto por 11 lados de medida 5, basta repetir a posição dos retângulos usados na cobertura do lado de medida 27 até completar o retângulo, conforme a figura 39.1

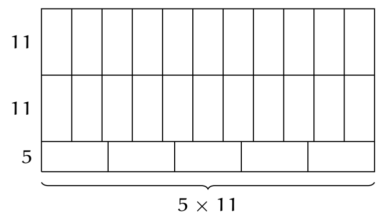


Figura 39.1

40 | Números no Tabuleiro 4 x 4

Sugestão: Comece preenchendo o tabuleiro pelas casas vizinhas a um canto.

Guilherme escreveu 0 ou 1 em cada casa de um tabuleiro 4×4. Ele colocou os números de modo que a soma dos números das casas vizinhas de cada casa do tabuleiro fosse igual a 1.
Por exemplo, na figura 40.1, considerando a casa marcada com ●, a soma dos números das casas sombreadas é igual a 1.

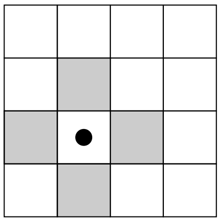


Figura 40.1

Determine a soma de todos os 16 números do tabuleiro.

Solução: Cada casa só pode ter um vizinho com um número 1 e os outros vizinhos devem ser zeros, já que a soma dos vizinhos é 1.

Começando do canto superior esquerdo, podemos supor sem perda de generalidade que preenchemos o tabuleiro como na figura 40.2.

Nos passos seguintes, as casas preenchidas são as vizinhas da casa marcada.

Em cada passo, os números preenchidos são únicos para respeitar as condições do problema.

A soma dos números nas casas preenchidas é 3. Fazendo uma análise semelhante, começando no canto inferior esquerdo ou no canto superior direito, concluímos que a soma dos números das outras casas também é igual a 3.

Portanto, a soma dos números colocados no tabuleiro é sempre igual a 6.

●	1		
0			

Figura 40.2

	1		
0	●	0	
	0		

Figura 40.3

	1	●	0
0		0	
	0		

Figura 40.4

	1		0
0		0	●
	0		1

Figura 40.5

	1		0
0		0	
●	0		1
1			

Figura 40.6

	1		0
0		0	
	0	●	1
1		0	

Figura 40.7

Nível 2

19. Aritmética e Álgebra

Nível 2 | Soluções

41 | Múltiplo de 36

Determine o maior múltiplo de 36 que possui todos os algarismos pares e diferentes.

Fatos que Ajudam: A soma dos algarismos de um múltiplo de 9 é divisível por 9.

Solução: Para um número ser divisível por $36 = 4 \times 9$, deve ser divisível por 4 e por 9. Assim, a soma dos algarismos do número n procurado deve ser divisível por 9.

Por outro lado, como todos os algarismos são pares, a soma dos algarismos também é par. Assim, a soma dos algarismos é no mínimo 18. Como $0+2+4+6+8=20$, o número n deve ser formado pelos algarismos 0, 4, 6 e 8.

O maior número que podemos formar com esses algarismos, sem repetir, é 8640, o qual também é divisível por 4, assegurando que este é o número procurado.

42 | Quem é maior?

Sejam

$$R = 3 \times 9 + 4 \times 10 + 5 \times 11 + \cdots + 2003 \times 2009.$$

e

$$S = 1 \times 11 + 2 \times 12 + 3 \times 13 + \cdots + 2001 \times 2011$$

(a) Qual é o maior número: R ou S?

(b) Calcule a diferença entre o maior e o menor.

Sugestão: Observe que cada parcela de S é da forma

$$n \times (n+10)$$

e cada parcela de R é da forma

$$(n+2) \times (n+8).$$

Fatos que Ajudam:

$$(a+b) \times (c+d) =$$
$$ac + ad + bc + bd.$$

Solução:

(a) Cada parcela de S é da forma $n \times (n+10) = n^2 + 10n$ e cada parcela de R é da forma $(n+2) \times (n+8) = n^2 + 10n + 16$ com $n = \{1, 2, \dots, 2001\}$ em ambos os casos. Assim, para todo n, cada parcela de R é maior que a correspondente em S, o que torna $R > S$.

(b) A diferença entre as parcelas correspondentes é igual a

$$(n^2 + 10n + 16) - (n^2 + 10n) = 16.$$

Como existem 2001 parcelas, a diferença entre R e S é igual a $16 \times 2001 = 32016$.

43 | Resto da Divisão

Sugestão: No item (b), analise os números que possuem a soma dos algarismos maior ou igual a 17.

Um número n de dois algarismos é dividido pela soma de seus algarismos, obtendo resto r.

(a) Encontre um número n tal que $r = 0$.

(b) Mostre que r não pode ser maior que 15.

(c) Mostre que para qualquer r menor ou igual a 12, existe um n que deixa resto r ao dividi-lo pela soma de seus algarismos.

Solução:

(a) Existem vários exemplos onde o resto da divisão é 0, sendo o menor deles $n = 12$.

(b) Denotemos por S a soma dos algarismos de n.

Observemos que $S \leqslant 18$ e a igualdade somente acontece se $n = 99$, mas neste caso o resto da divisão é 9.

Se $S = 17$, temos dois possíveis valores de $n = 89$ e 98, que quando divididos por 17 deixam respectivamente restos 4 e 13.

Nos números restantes, a soma dos algarismos é menor ou igual a 16. Assim, o resto deve ser menor ou igual a 15.

O resto é igual a 15 se $n = 79$. Verifique!

(c) Para terminar, basta mostrar um exemplo para cada resto entre 1 e 12. Se consideramos os números $19, 28, 37, \ldots, 91$, em todos a soma de seus algarismos é 10 e os restos da divisão por 10 são respectivamente $9, 8, \ldots, 1$. Para os restos 10, 11 e 12, basta considerar os números 65, 76 e 87.

44 | Soma de Consecutivos

Sugestão: Para quatro números consecutivos use a notação x, $x+1$, $x+2$, $x+3$.

Fatos que Ajudam: (a) O único número primo par é 2. (b) O único número primo múltiplo de 3 é 3.

(a) A soma de **quatro** inteiros positivos consecutivos pode ser um número primo? Justifique sua resposta.

(b) A soma de **três** inteiros positivos consecutivos pode ser um número primo? Justifique sua resposta.

Solução:

(a) Seja x o menor dos números. Então, a soma em questão é

$$x + (x+1) + (x+2) + (x+3) = 4x + 6 = 2(x+3).$$

Este número é par maior que 2, portanto não pode ser um número primo.

(b) Seja y o menor dos números. Então, a soma em questão é

$$y + (y+1) + (y+2) = 3y + 3 = 3(y+1).$$

Este número é múltiplo de 3 e maior que 3, logo não pode ser um número primo.

45 | Quadrado Perfeito

Observe que

$$1^2 + 2^2 + (1 \times 2)^2 = 3^2$$
$$2^2 + 3^2 + (2 \times 3)^2 = 7^2$$
$$3^2 + 4^2 + (3 \times 4)^2 = 13^2.$$

Prove que se a e b são inteiros consecutivos então o número

$$a^2 + b^2 + (ab)^2$$

é um quadrado perfeito.

Sugestão: Mostre que a expressão considerada é igual a

$$(ab+1)^2.$$

Fatos que Ajudam:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Solução: Suponha, sem perda de generalidade, que $b > a$, isto é, $b - a = 1$. Então

$$(b-a)^2 = 1^2$$
$$b^2 - 2ab + a^2 = 1$$
$$a^2 + b^2 = 2ab + 1.$$

Somando $(ab)^2$ em cada lado da igualdade, temos

$$a^2+b^2+(ab)^2 = (2ab+1)+(ab)^2 = (ab)^2+2(ab)\cdot 1+1^2 = (ab+1)^2.$$

Problema Relacionado

Observe que

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1 = 5^2$$
$$2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1 = 11^2$$
$$3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 19^2.$$

Prove que o produto de quatro inteiros positivos consecutivos, aumentado em uma unidade, é um quadrado perfeito.

46 | Quantas Frações!

Prove que

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{1991}}}}} + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{1991}}}}}} = 1.$$

Sugestão: Elimine as milhares de frações, fazendo

$$A = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{1991}}}}.$$

Solução: Façamos

$$A = \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{1991}}}}.$$

Assim, a soma em questão será

$$\frac{1}{2+A} + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+A}} = \frac{1}{2+A} + \frac{1+A}{2+A} = \frac{2+A}{2+A} = 1.$$

47 | Primos Não!

Sugestão: Tente fatorar os números dados:

(a) Escrevendo o número dado como uma diferença de dois quadrados.

(b) Escrevendo o número dado como uma soma de dois cubos.

Fatos que Ajudam: Utilize as identidades:

(a) $m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)$

(b) $m^3+n^3 = (m+n)(m^2-mn+n^2)$

(a) Prove que o número 3999991 não é primo.

(b) Prove que o número 1000343 não é primo.

Solução:

(a) Observe que

$$\begin{aligned} 3999991 &= 4000000 - 9 \\ &= 4 \cdot 10^6 - 3^2 \\ &= (2 \cdot 10^3)^2 - 3^2 \\ &= (2 \cdot 10^3 - 3)(2 \cdot 10^3 + 3) = 1997 \cdot 2003, \end{aligned}$$

e portanto não é um número primo.

(b) Observe que

$$\begin{aligned} 1000343 &= 10^6 + 7^3 \\ &= (10^2)^3 + 7^3 = \\ &= (10^2+7)((10^2)^2 - 10^2 \cdot 7 + 7^2) \\ &= 107 \cdot 9349, \end{aligned}$$

portanto não é primo.

48 | Trilegais

Sugestão: Estude a quantidade de números pares e ímpares em um dos subconjuntos com três elementos.

Fatos que Ajudam: A soma de dois números pares ou ímpares resulta num número par. A soma de um número par com um número ímpar resulta num número ímpar.

Um conjunto de números é chamado *trilegal* se pode ser dividido em subconjuntos com três elementos de tal modo que um dos elementos seja a soma dos outros dois. Por exemplo, o conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 11, 12\}$ é trilegal pois pode ser dividido em $\{1, 5, 6\}$, $\{2, 9, 11\}$, $\{3, 7, 10\}$ e $\{4, 8, 12\}$.

(a) Mostre que $\{1, 2, \ldots, 14, 15\}$ é trilegal.

(b) Mostre que $\{1, 2, \ldots, 2010\}$ não é trilegal.

Solução:

(a) Para a primeira parte basta encontrar uma distribuição em subconjuntos com três elementos, por exemplo

$$\{1,6,7\}, \{2,12,14\}, \{3,8,11\}, \{4,9,13\}, \{5,10,15\}.$$

(b) Observemos que se um conjunto de três elementos cumpre a condição de ser trilegal, então ele tem de ser da forma

$$\{\text{par, par, par}\}$$

ou

$$\{\text{ímpar, ímpar, par}\}.$$

Suponhamos que podemos dividir o conjunto em subconjuntos trilegais que tem A conjuntos do primeiro tipo e B conjuntos de segundo tipo. Como a quantidade de números ímpares menores que 2010 é 1005, devemos ter $2B = 1005$, o que é contraditório.

49 | Diferença de Quadrados

(a) De quantas formas é possível escrever o número 105 como diferença de dois quadrados perfeitos?

(b) Mostre que não é possível escrever o número 106 como diferença de dois quadrados perfeitos.

Fatos que Ajudam: A diferença entre os quadrados de dois números é igual ao produto da soma destes números pela diferença dos mesmos números. Algebricamente:

$$m^2 - n^2 = (m+n)(m-n).$$

Solução:

(a) Sejam x e y dois inteiros positivos tais que a diferença entre seus quadrados é igual a 105, ou seja, $x^2 - y^2 = 105$. Fatorando, obtemos $(x-y)(x+y) = 105$ e, portanto, $x+y$ e $x-y$ devem ser divisores de 105, com $x+y > x-y$. Observe que $1 \cdot 105 = 3 \cdot 35 = 5 \cdot 21 = 7 \cdot 15$ são todas as maneiras de escrever o número 105 como produto de dois inteiros positivos. Assim, teremos quatro casos:

$$\begin{cases} x+y = 105 \\ x-y = 1 \end{cases} \iff x = 53 \text{ e } y = 52.$$

$$\begin{cases} x+y = 35 \\ x-y = 3 \end{cases} \iff x = 19 \text{ e } y = 16.$$

$$\begin{cases} x+y = 21 \\ x-y = 5 \end{cases} \iff x = 13 \text{ e } y = 8.$$

$$\begin{cases} x+y = 15 \\ x-y = 7 \end{cases} \iff x = 11 \text{ e } y = 4.$$

Portanto, é possível escrever 105 como diferença de dois quadrados de quatro formas, a saber: $53^2 - 52^2$, $19^2 - 16^2$, $13^2 - 8^2$ e $11^2 - 4^2$.

(b) Observe que quaisquer que sejam os inteiros x e y, os números $x+y$ e $x-y$ são ambos pares ou ambos ímpares, pois a soma dos dois números é igual a $2x$, que é par, logo não podemos ter um par e o outro ímpar.

Deste modo concluímos que o produto $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$ é múltiplo de 4 (caso $x+y$ e $x-y$ sejam pares) ou um número ímpar (caso $x+y$ e $x-y$ sejam ímpares).

Como 106 é par mas não é divisível por 4, não pode ser escrito como diferença de dois quadrados.

Sugestão: Verifique que a sequência que fica no quadro depois de todo o processo é periódica.

Fatos que Ajudam: Um número e a soma de seus algarismos deixam o mesmo resto quando são divididos por 9.

50 | Outra de Joãozinho

Joãozinho escreveu os números de 1 até 100000 no quadro, depois foi trocando cada número pela soma de seus algarismos e repetiu este processo até obter uma lista de 100000 números de um algarismo. Por exemplo, começando pelo número 7234 obtemos $7+2+3+4=16$ e $1+6=7$.

(a) Que número ficou no lugar do número 98765?

(b) Quantas vezes aparece o número 8 na lista final?

(c) Qual é o número que mais vezes se repete?

Solução:

(a) $98765 \longrightarrow 9+8+7+6+5=35 \longrightarrow 3+5=8$.

(b) Observemos que um número e a soma de seus algarismos deixam o mesmo resto quando divididos por 9. Assim, depois de terminar todo o processo vamos obter uma lista da forma

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,1,2,3,4,\ldots,8,9,1.$$

Assim até 99999, cada um dos algarismos aparece 11111 vezes, em particular o 8 aparece 11111 vezes.

(c) Do item anterior fica claro que o número que mais se repete é o 1, pois aparece 11112 vezes na lista.

51 | Colar de Ouro

Arqueólogos encontraram um colar de ouro feito de placas no formato de pentágonos regulares. Cada uma destas placas está conectada a outras duas placas, como ilustra a figura.

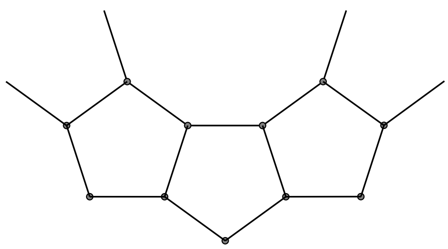


Figura 51.1

Quantas placas formam o colar?

Solução: O ângulo interno de um pentágono regular mede 108°. Assim, o ângulo interno do polígono determinado pelo colar mede $360^\circ - 108^\circ - 108^\circ = 144^\circ$. Devemos então encontrar n tal que

$$\frac{180^\circ(n-2)}{n} = 144^\circ.$$

Resolvendo esta equação, obtemos $n = 10$. Portanto, dez placas formam o colar.

Sugestão: Calcule o ângulo interno do polígono determinado pelo colar.

Fatos que Ajudam: A medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados é dada pela fórmula $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$.

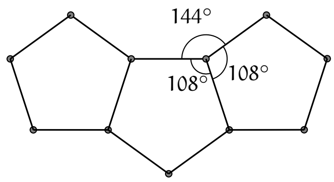


Figura 51.2

52 | AP x BN

$ABCD$ é um retângulo, $AD = 5$ e $CD = 3$.

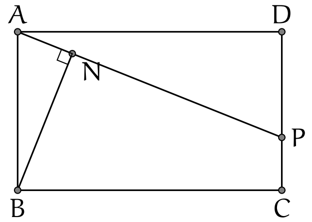


Figura 52.1

Se BN é perpendicular a AP, calcule $AP \times BN$.

Solução: Vamos calcular a área do triângulo APB de dois modos diferentes.

Sugestão: Calcule a área do triângulo APB de dois modos distintos.

Fatos que Ajudam: A área de um triângulo é igual a metade do produto da medida da base pela medida da altura relativa à essa base.

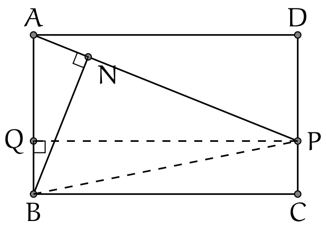


Figura 52.2

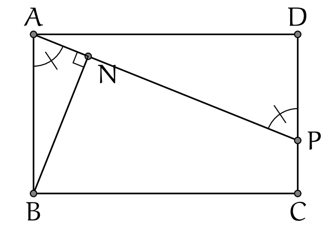


Figura 52.3

Seja Q o pé da altura relativa ao lado AB no triângulo APB. Então a área do triângulo APB é igual a

$$\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{AB \times PQ}{2} = \frac{AB \times AD}{2} = \frac{3 \times 5}{2} = \frac{15}{2}.$$

Porém, podemos calcular a área do triângulo APB escolhendo por base o lado AP e, neste caso, BN é a altura. Assim,

$$\frac{AP \times BN}{2} = \frac{15}{2},$$

donde $AP \times BN = 15$.

Segunda Solução: Os ângulos $B\hat{A}N$ e $A\hat{P}D$ possuem a mesma medida, porque ambos são o complemento do ângulo $D\hat{A}P$. Então os triângulos ANB e PDA são semelhantes, pois possuem dois pares de ângulos de mesma medida. Portanto,

$$\frac{BA}{AP} = \frac{BN}{AD},$$

e segue que $AP \times BN = BA \times AD = 15$.

53 | Dois Quadrados

Sugestão: Trace a diagonal AC.

Fatos que Ajudam: Triângulos com mesma base e mesma altura possuem áreas iguais.

Na figura, ABCD e CEFG são quadrados e o lado do quadrado CEFG mede 12 cm.

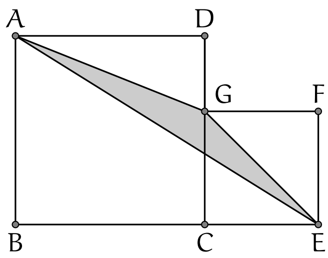


Figura 53.1

Quais são os possíveis valores da área do triângulo AEG?

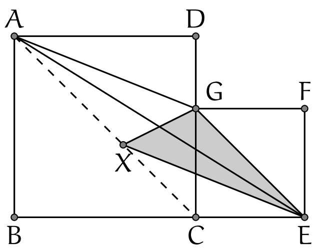


Figura 53.2

Solução: Traçamos a diagonal AC do quadrado ABCD. Como as retas AC e GE formam ângulo de 45° em relação à reta BE, concluímos que AC e GE são paralelas.

Seja X um ponto arbitrário sobre AC. Os triângulos AGE e XGE possuem a mesma área, pois ambos têm a mesma base GE e a mesma altura que corresponde à distância entre as retas paralelas AC e GE. Tomando $X = C$, concluímos que a área do triângulo AGE é igual à área de CGE, isto é, $12 \times 12/2 = 72\ \text{cm}^2$.

54 | O Tesouro do Pirata

Um pirata resolveu enterrar um tesouro em uma ilha. Para tal, ele caminhou da árvore A para a rocha R_1, e depois a mesma distância e na mesma direção até o ponto X. Ele fez o mesmo em relação a entrada da caverna C e em relação à rocha R_2, alcançando os pontos Y e Z, respectivamente. Ele enterrou o tesouro em T, ponto médio de AZ.

Sugestão: Mostre que a posição T do tesouro não depende do ponto inicial A.

Fatos que Ajudam: Em todo quadrilátero, os pontos médios dos lados são vértices de um paralelogramo.

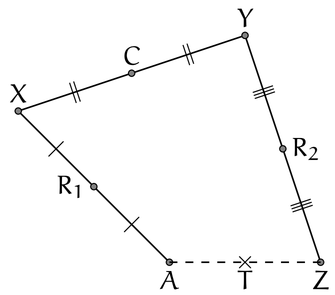


Figura 54.1

Ao voltar à ilha para desenterrar o tesouro, o pirata encontrou as rochas e a caverna, mas não encontrou a árvore. Como o pirata pode descobrir o tesouro?

Solução: A chave para o pirata encontrar o tesouro está no seguinte fato geométrico:

Afirmação: *Em todo quadrilátero, os pontos médios dos lados são vértices de um paralelogramo.*

Isto significa que a posição T do tesouro independe da posição da árvore. No quadrilátero $AXYZ$, R_1, C, R_2 e T são os pontos médios dos lados. Portanto, R_1CR_2T é um paralelogramo.

O pirata pode começar de um ponto qualquer e repetir os procedimentos, ou pode determinar T traçando uma reta paralela a R_1C por R_2 e uma paralela a CR_2 por R_1. O ponto de interseção das paralelas é o ponto T, localização do tesouro.

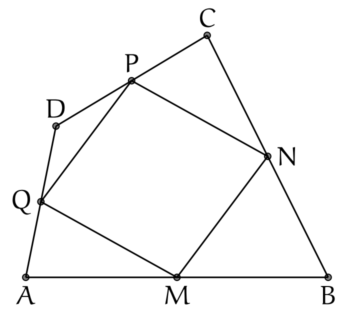


Figura 54.2

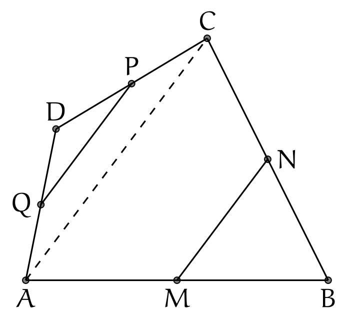


Figura 54.3

Demonstração da Afirmação: Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo e M, N, P e Q os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. Vamos provar que $MNPQ$ é um paralelogramo.
Considerando o triângulo ABC, o segmento MN é a base média relativa ao lado AC, sendo paralelo ao mesmo e medindo a metade de AC.
Analogamente, olhando para o triângulo CDA, o segmento PQ é a base média relativa ao lado AC, e portanto é paralelo a AC e mede a metade de AC.
Segue que os segmentos MN e PQ são iguais e paralelos, mostrando que o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo.

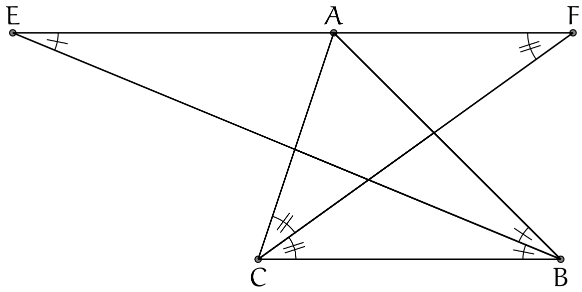
55 | Bissetrizes

Sugestão: Mostre que CAF e BAE são triângulos isósceles.

Fatos que Ajudam: A bissetriz de um ângulo o divide em dois ângulos de mesma medida.

Seja ABC um triângulo com $AB = 13$, $BC = 15$ e $AC = 9$. Seja r a reta paralela a BC traçada por A. A bissetriz do ângulo $A\widehat{B}C$ corta a reta r em E e a bissetriz do ângulo $A\widehat{C}B$ corta r em F. Calcular a medida do segmento EF.

Solução:



Como a reta EF é paralela ao lado BC, os ângulos alternos internos gerados pela transversal CF são iguais, isto é, $F\hat{C}B = C\hat{F}A$. Por outro lado, como CF é bissetriz, temos $F\hat{C}B = F\hat{C}A$ e assim, $F\hat{C}A = C\hat{F}A$, donde o triângulo CAF é isósceles de base CF. Portanto, $AF = AC = 9$.

Analogamente, concluímos que o triângulo BAE é isósceles de base BE e $AE = AB = 13$. Assim, $EF = EA + AF = 22$.

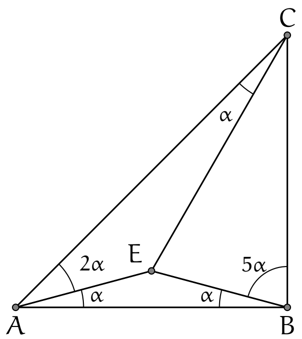
56 | Ângulos e Ângulos!

Sugestão: Mostre que o triângulo BEC é isósceles.

Fatos que Ajudam: A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.

No interior de um triângulo ABC, toma-se um ponto E tal que $AE = BE$ e $AB = EC$. Se $A\hat{B}E = \alpha = E\hat{C}A$, $E\hat{A}C = 2\alpha$ e $E\hat{B}C = 5\alpha$, determine α.

Solução:



Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° obtemos

$$\begin{cases} A\hat{E}B = 180° - (\alpha + \alpha) = 180° - 2\alpha \\ A\hat{E}C = 180° - (\alpha + 2\alpha) = 180° - 3\alpha. \end{cases}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} C\hat{E}B &= 360° - (A\hat{E}C + A\hat{E}B) = \\ &= 360° - (180° - 3\alpha + 180° - 2\alpha) = 5\alpha. \end{aligned}$$

Como o ângulo $E\hat{B}C$ também mede 5α, segue que o triângulo BEC é isósceles. Assim, $AB = CE = BC$, isto é, o triângulo ABC também é isósceles.

Logo, $B\hat{C}A = B\hat{A}C = 3\alpha$ e $B\hat{C}A + C\hat{A}B + A\hat{B}C = 180°$, isto é, $3\alpha + 3\alpha + 6\alpha = 180°$, o que resulta em $\alpha = 15°$.

57 | Quadrado, Pentágono e Icoságono

A figura mostra parte de um polígono regular de 20 lados (icoságono) $ABCDEF...$, um quadrado $BCYZ$ e um pentágono regular $DEVWX$.

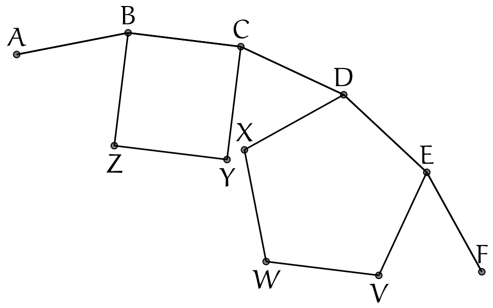


Figura 57.1

> **Sugestão:** Para o item (b), determine a medida do ângulo $C\hat{D}X$.
>
> **Fatos que Ajudam:** A medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados é dada pela fórmula $\frac{180°(n-2)}{n}$.

(a) Determine a medida do ângulo $Y\hat{D}C$.

(b) Mostre que o vértice X está sobre a reta DY.

Solução:

(a) O ângulo interno do icoságono regular mede $\dfrac{180° \times 18}{20} = 162°$. Segue que $Y\hat{C}D = 162° - 90° = 72°$. Como $YC = CD$, o triângulo YCD é isósceles de base YD. Assim, $Y\hat{D}C = D\hat{Y}C = \dfrac{180° - 72°}{2} = 54°$.

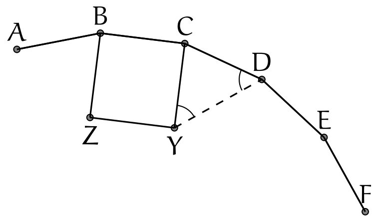


Figura 57.2

(b) Cada ângulo interno de um pentágono regular mede $\dfrac{180° \times 3}{5} = 108°$. Assim, $C\hat{D}X = 162° - 108° = 54°$. Como as retas XD e YD formam o mesmo ângulo com a reta CD, segue que os pontos X, Y e D pertencem a uma mesma reta.

(c) Este problema não tem item (c), mas poderíamos ter perguntado: Qual a única letra do alfabeto que ainda poderíamos usar nesta figura?

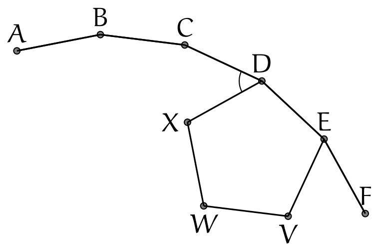


Figura 57.3

Resposta:

Como T é a vigésima letra do alfabeto, o icoságono é $ABCDEF...T$. Como usamos também V, W, X, Y e Z, só faltou a letra U! Você já tinha visto um problema de geometria com tantas letras?

Problema Relacionado

Construímos dois triângulos equiláteros: ABE interno e BFC externo ao quadrado $ABCD$. Prove que os pontos D, E e F se localizam na mesma reta.

58 | Eneágono Regular

Sugestão: No item (b), prolongue os lados AB e ED, determinando o ponto de interseção X.

Fatos que Ajudam: A soma das medidas dos ângulos de um polígono de n lados é dada pela fórmula $180°(n-2)$. A medida do ângulo interno de um polígono regular de n lados é dada pela fórmula $\frac{180°(n-2)}{n}$.

A figura ilustra um polígono regular de 9 lados. A medida do lado do polígono é a, a medida da menor diagonal é b e a medida da maior diagonal é d.

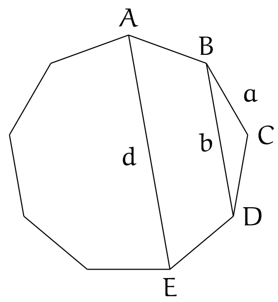


Figura 58.1

(a) Determine a medida do ângulo $B\hat{A}E$.

(b) Mostre que $d = a + b$.

Solução:

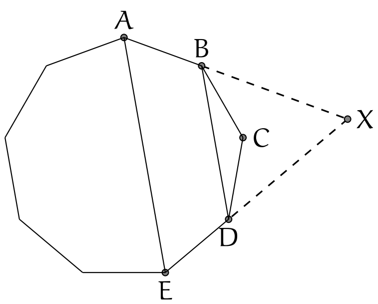


Figura 58.2

(a) A medida do ângulo interno do eneágono regular (9 lados) é igual a $180° \times 7/9 = 140°$.

Considere agora o pentágono $ABCDE$, como indicado na figura. A soma de seus ângulos internos é $180°(5-2) = 540°$. Sabemos que $A\hat{B}C = B\hat{C}D = C\hat{D}E = 140°$ e pela simetria da figura sabemos que $E\hat{A}B = A\hat{E}D = \alpha$. Portanto,

$$2\alpha + 3 \times 140° = 540°,$$

donde $\alpha = 60°$.

(b) Seja X o ponto de interseção das retas AB e DE. Como $X\hat{A}E = X\hat{E}A = 60°$, o triângulo AXE é equilátero. O triângulo BXD também é equilátero, pois a reta AE é paralela à reta BD.

Assim, temos $AX = AE$ e $BX = BD$. Como $AX = AB + BX$, temos $AE = AB + BD$, ou seja, $d = a + b$.

59 | Hexágono Equiangular

Todos os ângulos de um hexágono $ABCDEF$ são iguais. Mostre que $AB - DE = EF - BC = CD - FA$.

Sugestão: Prolongue os lados do hexágono.

Fatos que Ajudam: A soma dos ângulos internos de um polígono com n lados é igual a $180°(n-2)$.

Solução:

Prolonguemos os segmentos AF, BC e DE determinando os pontos de intersecção X, Y, Z, como mostrado na figura.

Como a soma dos ângulos internos de um hexágono convexo é $180° \times (6-2) = 720°$, cada ângulo interno deste hexágono mede $720°/6 = 120°$. Assim, $X\hat{A}B = 180° - 120° = 60°$ e do mesmo modo $X\hat{B}A = 60°$. Segue que o ângulo $A\hat{X}B$ mede 60° e de igual forma os ângulos em Y e Z medem 60°.

Portanto, os triângulos XAB, YCD, ZFE e XYZ são equiláteros. Em particular, $XY = XZ$. Mas

$$XY = XB + BC + CY = AB + BC + CD$$
$$XZ = XA + AF + FZ = AB + AF + EF.$$

Igualando obtemos $BC + CD = AF + EF$, donde obtemos $EF - BC = CD - FA$. Pelo mesmo processo, de $XY = YZ$, obtemos $AB - DE = EF - BC$.

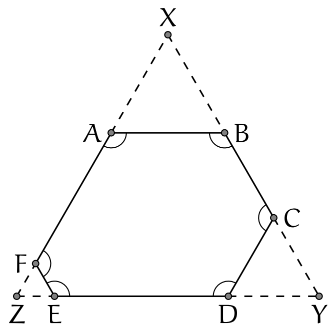


Figura 59.1

60 | Pentágono Equilátero

Mostre que é possível construir um pentágono com todos os lados de mesma medida e cujos ângulos internos meçam 60°, 80°, 100°, 140° e 160°, em alguma ordem.

Sugestão: Suponha que o pentágono já foi construído; comece investigando pelo ângulo cuja medida é 60°.

Fatos que Ajudam: Se um quadrilátero possui os quatro lados de mesma medida, então ele é um losango. Em um losango, os ângulos opostos possuem a mesma medida.

Solução:

Suponhamos que já construímos o pentágono $ABCDE$ e que o ângulo em A mede 60°. Traçando a reta BE, concluímos que o triângulo ABE é equilátero, pois $AB = AE$ e $E\hat{A}B = 60°$. Logo, $BE = AB$ e, portanto, $BCDE$ tem todos os seus lados com a mesma medida, isto é, $BCDE$ é um losango.

Em particular, os ângulos opostos do losango são iguais. Isto implica que, no pentágono, o ângulo em B é igual ao ângulo em D mais 60° e o ângulo em E é igual ao ângulo em C mais 60°.

Como $160° = 100° + 80°$ e $140° = 80° + 60°$, concluímos que os ângulos em C e D devem assumir os valores 80° e 100°, não necessariamente nessa ordem, enquanto B e E assumem os respectivos valores de D e C, adicionados de 60°.

Portanto, para construir tal pentágono basta construir um triângulo equilátero ABE e um losango $BCDE$ com ângulos de medidas 100° e 80°.

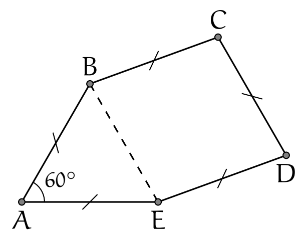


Figura 60.1

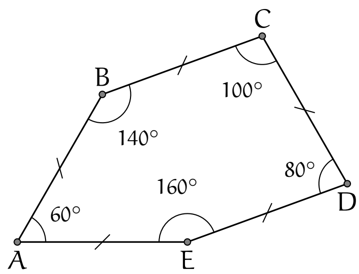


Figura 60.2

21. Combinatória

Nível 2 | Soluções

61 | Colorações do Cubo

De quantas formas é possível colorir as 6 faces de um cubo de preto ou branco? Duas colorações são iguais se é possível obter uma a partir da outra por uma rotação.

Solução: Observemos que basta contar quantas colorações existem que têm exatamente 0, 1, 2 e 3 faces pretas, porque os outros casos são simétricos. Com uma ou nenhuma face preta existe uma única coloração para cada caso. Quando temos duas faces pretas temos duas possíveis colorações que são: quando estas faces são opostas e quando elas não são. Por último, com três faces pretas também temos dois casos: quando duas dessas faces pretas são opostas e quando não existem faces opostas de cor preta. Assim, no total temos $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 = 10$ possíveis colorações.

Problema Relacionado

De quantas formas é possível colorir as 12 arestas de um cubo de branco ou de preto? Duas colorações são iguais quando é possível obter uma a partir da outra por uma rotação.

62 | Comparando Sequências

Um professor e seus 30 alunos escreveram, cada um, os números de 1 a 30 em uma ordem qualquer. A seguir, o professor comparou as sequências. Um aluno ganha um ponto cada vez que um número aparece na mesma posição na sua sequência e na do professor. Ao final, observou-se que todos os alunos obtiveram quantidades diferentes de pontos. Mostre que a sequência de um aluno coincidiu com a sequência do professor.

Sugestão: Selecione uma pessoa que não acertou todos os pontos e determine o número máximo de pontos que ela pode ter acertado.

Solução: O número de acertos é um número entre 0 e 30 inclusive. Mas, observe que 29 não pode ser obtido porque se 29 números estão em posição certa, só há uma maneira de colocar o 30° número, que é em posição certa também.

Como há 30 alunos e 30 possíveis resultados, $\{0, 1, \ldots, 28, 30\}$, então um aluno escreveu exatamente a sequência do professor.

63 | Segmentos e Triângulos

Sugestão: Para o item (a), conte o número de cordas que saem de um determinado ponto.

Dez pontos são marcados ao redor de uma circunferência, como ilustra a figura.

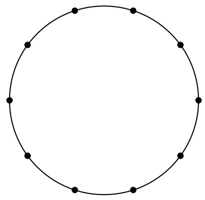


Figura 63.1

(a) Quantas cordas podem ser formadas ligando dois quaisquer destes pontos? (Uma corda é um segmento de reta ligando dois pontos sobre uma circunferência.)

(b) Quantos triângulos podem ser formados ligando três quaisquer destes pontos?

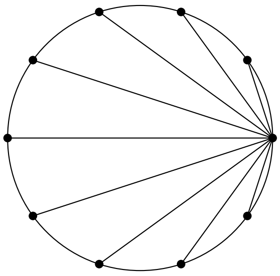


Figura 63.2

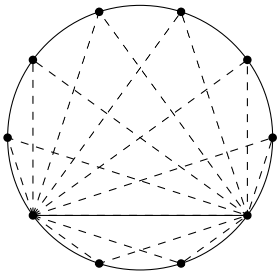


Figura 63.3

Solução:

(a) De cada ponto saem 9 cordas e temos 10 pontos. Mas cada corda é contada duas vezes (uma corda AB é contada por sair de A e por sair de B), assim temos $9 \times 10/2 = 45$ cordas.

(b) Cada corda é lado de 8 triângulos (basta escolher um ponto que não seja extremidade da corda escolhida) mas cada triângulo é contado três vezes (uma vez para cada corda). Como temos 45 cordas, então temos $8 \times 45/3 = 120$ triângulos.

Contando Subconjuntos

Vamos resolver um problema mais geral em que temos n pontos distribuídos na circunferência. Como cada corda está determinada por dois pontos, então precisamos contar de quantas formas podemos escolher 2 pontos entre os n.

O primeiro ponto pode ser escolhido de n formas, já o segundo pode ser escolhido de $n-1$ formas, pois ele deve ser distinto do primeiro selecionado. Assim temos $n(n-1)$ escolhas de pares ordenados, mas a ordem em que foram selecionados não importa, porque eles geram o mesmo subconjunto e assim o mesmo segmento. Portanto, o número de subconjuntos de dois pontos ou equivalentemente o número de segmentos é $n(n-1)/2$.

Seguindo este raciocínio, encontrar todos os triângulos equivale a encontrar todos os subconjuntos de três pontos dentre os n pontos. Assim, a escolha ordenada de três pontos pode ser realizada de $n(n-1)(n-2)$ maneiras, mas como a ordem não importa, então o subconjunto com três elementos $\{a, b, c\}$, está sendo contado seis vezes: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$. Deste modo, o número de subconjuntos com três pontos, ou equivalentemente, o número de triângulos com vértices nos n pontos é $n(n-1)(n-2)/6$.

No caso geral, se queremos saber quantos polígonos convexos com k vértices existem (ou equivalentemente, quantos subconjuntos de k pontos temos entre os n pontos), a resposta é dada por $\binom{n}{k}$ (lê-se "n escolhe k"), que é calculado como

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k}.$$

64 | Esqueleto do Cubo

O esqueleto de um cubo $6 \times 6 \times 6$, formado por cubinhos $1 \times 1 \times 1$ é mostrado na figura.

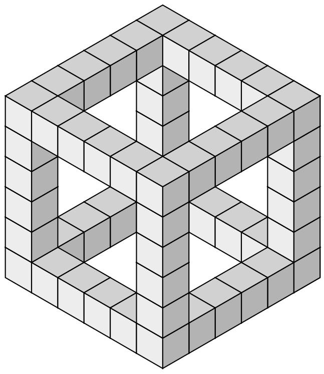


Figura 64.1

(a) Quantos cubinhos formam este esqueleto?

(b) É dado um cubo $7 \times 7 \times 7$ formado por cubinhos $1 \times 1 \times 1$. Quantos cubinhos devemos retirar para obter um esqueleto do cubo $7 \times 7 \times 7$.

Solução:

(a) O esqueleto do cubo é formado por uma camada superior e uma inferior com 20 cubinhos cada e quatro colunas com 4 cubinhos cada.

Assim, o total de cubinhos é

$$2 \times 20 + 4 \times 4 = 56.$$

(b) Do cubo $7 \times 7 \times 7$ foi retirado um cubo central $5 \times 5 \times 5$ e em cada uma das faces foram retirados 5×5 cubinhos.

Portanto, o total de cubinhos retirados foi

$$5 \times 5 \times 5 + 6 \times (5 \times 5) = 125 + 150 = 275.$$

65 | Placas das Bicicletas

Cada uma das placas das bicicletas de Quixajuba contém três letras. A primeira letra é escolhida dentre os elementos do conjunto $\mathcal{A} = \{G, H, L, P, R\}$, a segunda letra é escolhida dentre os elementos do conjunto $\mathcal{B} = \{M, I, O\}$ e a terceira letra é escolhida dentre os elementos do conjunto $\mathcal{C} = \{D, U, N, T\}$.
Devido ao aumento no número de bicicletas da cidade, teve-se que expandir a quantidade de possibilidades de placas. Ficou determinado acrescentar duas novas letras a apenas um dos conjuntos ou uma letra nova a dois dos conjuntos.
Qual o maior número de novas placas que podem ser feitos, quando se acrescentam as duas novas letras?

Sugestão: Calcule o número inicial de placas que podem ser feitas com os elementos dos conjuntos $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ e depois refaça o cálculo analisando as diversas possibilidades de aumentar em 1 ou 2 os elementos dos conjuntos.

Solução: Inicialmente, é possível fazer o emplacamento de $5 \times 3 \times 4 = 60$ bicicletas. Vamos analisar as duas situações possíveis:

- Aumentamos duas letras num dos conjuntos. Com isso, podemos ter

$\mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C}$	Número de Placas
$7 \times 3 \times 4$	84
$5 \times 5 \times 4$	100
$5 \times 3 \times 6$	90

Assim, com a modificação mostrada, o número de novas placas é no máximo $100 - 60 = 40$.

- Aumentar uma letra em dois dos conjuntos. Com isso, podemos ter

$\mathcal{A} \times \mathcal{B} \times \mathcal{C}$	Número de Placas
$6 \times 4 \times 4$	96
$6 \times 3 \times 5$	90
$5 \times 4 \times 5$	100

Neste caso, o número de placas novas também é no máximo 40.

66 | Torneio de Tênis

Sugestão: No item (b), considere os jogadores que são eliminados ao invés dos que passam para as próximas rodadas.

Num torneio de tênis cada jogador passa para a rodada seguinte somente em caso de vitória. Se não for possível que sempre passe para a rodada seguinte um número par de jogadores, a organização do torneio decide quais rodadas determinados jogadores devem jogar. Por exemplo, um *cabeça de chave* pode, a critério dos organizadores, entrar na segunda rodada, ou passar da primeira para a terceira, de modo que o total de jogadores que participem de cada rodada seja par.

(a) Considere um torneio de tênis com 64 jogadores. Quantas partidas são disputadas?

(b) E em um torneio com 2011 jogadores?

Solução:

(a) Na primeira rodada são realizadas 32 partidas, das quais 32 jogadores passam para a fase seguinte. Depois são realizadas 16 partidas, classificando 16 para a rodada seguinte e assim por diante. Assim, o número de partidas do torneio é

$$32 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 63.$$

(b) Como em cada partida um jogador é eliminado, então o número de partidas é igual ao número de jogadores eliminados, isto é, $2011 - 1 = 2010$.

Problema Relacionado

Um torneio de futebol com 57 times será disputado com as seguintes regras:

(a) Nenhum jogo pode terminar empatado.

(b) O time que perder duas partidas será eliminado.

(c) O torneio termina quando sobrar apenas um time, que será o campeão.

Se o time campeão perder uma vez, quantas partidas serão disputadas no torneio?

67 | Pesando Pedras

Possuímos 32 pedras, todas com pesos diferentes. Descreva um processo para mostrar que podemos encontrar as duas pedras mais pesadas com 35 pesagens em uma balança de pratos.

Sugestão: Divida as pedras em pares e realize as pesagens, eliminando as pedras mais leves. Perceba que a segunda pedra mais pesada somente pode ser eliminada pela pedra mais pesada.

Solução: Dividimos as pedras em 16 pares, pesamos cada par e pegamos as 16 mais pesadas. Repetimos o processo com as 16 pedras obtendo 8 pedras com oito pesagens a mais, 4 pedras com quatro pesagens, 2 pedras com 2 pesagens e a pedra mais pesada com a última pesagem.

Até este momento foram usadas $16 + 8 + 4 + 2 + 1 = 31$ pesagens para encontrar a pedra mais pesada.

A segunda pedra mais pesada deve ser uma das pedras que foi comparada com a pedra mais pesada, que foram 5 pedras no total. É claro que para descobrir a segunda pedra mais pesada devem ser registradas as comparações das pesagens anteriores para saber quais pedras foram comparadas com a pedra mais pesada.

Para determinar a pedra mais pesada entre estas cinco pedras, precisamos de 4 pesagens porque cada vez que fazemos uma pesagem eliminamos a pedra mais leve. Portanto, precisamos de 35 pesagens para determinar as 2 pedras mais pesadas.

Temos 68 moedas com pesos diferentes. Fazendo 100 pesagens, encontre a moeda mais pesada e a mais leve.

68 | Produto 2000

Quantos números naturais de cinco algarismos têm o produto de seus algarismos igual a 2000?

Sugestão: Decomponha 2000 em fatores primos.

Solução: Inicialmente, observe que $2000 = 2^4 \times 5^3$. Como os algarismos do número são menores que 10, cada fator 5 deve ser um algarismo desse número. Além disso, o produto dos outros algarismos deve ser $2^4 = 16$. Assim, temos dois casos:

- Os algarismos que faltam são 2 e 8. Nesse caso, existem cinco possibilidades para posicionarmos o 2, quatro possibilidades para posicionarmos o 8 e uma única possibilidade para posicionarmos cada 5 que resta. Portanto, podemos formar $5 \times 4 = 20$ números.
- Os algarismos que faltam são 4 e 4. Nesse caso, podemos escolher dois lugares para os algarismos 4 de $\binom{5}{2} = 10$ modos (veja *Contando Subconjuntos* na página 118) e uma maneira de posicionarmos cada 5 que resta. Portanto, podemos formar 10 números.

Logo, podem ser formados $20 + 10 = 30$ números.

69 | Tabuleiro 123 x 123

Sugestão: (a) Divida em dois casos de acordo com a cor da casa central. (b) Determine o número de tabuleiros 3×3 que podem ser colocados no tabuleiro 123×123.

Num tabuleiro 123×123, cada casa é pintada de roxo ou azul de acordo com as seguintes condições:

- Cada casa pintada de roxo que não está na borda do tabuleiro tem exatamente 5 casas azuis dentre suas 8 vizinhas.
- Cada casa pintada de azul que não está na borda do tabuleiro tem exatamente 4 casas roxas dentre suas 8 vizinhas.

Nota: Duas casas são vizinhas se possuem um lado ou um vértice em comum.

(a) Considere um tabuleiro 3×3 dentro do tabuleiro 123×123. Quantas casas de cada cor pode haver neste tabuleiro 3×3?

(b) Calcule o número de casas pintadas de roxo no tabuleiro 123×123.

Solução:

(a) Observando um tabuleiro 3×3, podemos claramente ver que seu centro não está na borda do tabuleiro. A casa do centro pode:

- Estar pintada de roxo. Nesse caso, temos dentre suas 8 vizinhas, 5 azuis e 3 roxas. No total, há 4 casas roxas e 5 casas azuis nesse tabuleiro.
- Estar pintada de azul. Nesse caso, temos dentre suas 8 vizinhas, 4 azuis e 4 roxas. No total, há 4 casas roxas e 5 casas azuis nesse tabuleiro.

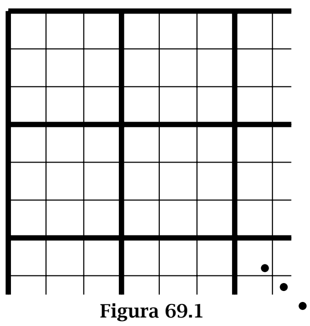


Figura 69.1

(b) Como em qualquer tabuleiro 3×3 dentro do tabuleiro 123×123 o número de casas azuis é 5 e o número de casas roxas é 4, podemos dividir o tabuleiro 123×123 em tabuleiros menores 3×3 conforme a figura 69.1. Deste modo, o tabuleiro é dividido em $\left(\frac{123}{3}\right)^2 = 41^2 = 1681$ tabuleiros 3×3. Como cada tabuleiro 3×3 tem 4 casas roxas, então há no total $1681 \times 4 = 6724$ casas roxas.

70 | Números no W

Em cada uma das casas do *W* da figura, escrevemos um número inteiro de 1 a 9 de modo que a soma dos três números de cada uma das quatro linhas seja a mesma.

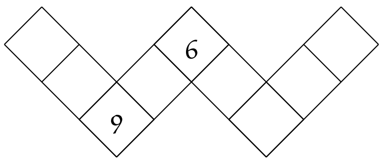


Figura 70.2

Já estão escritos o 6 e o 9. Como devem ser posicionados os outros números?

Sugestão: Determine os possíveis valores que podem ser colocados na casa vazia comum às duas linhas.

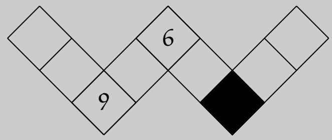


Figura 70.1

Fatos que Ajudam: A soma dos 9 primeiros números inteiros positivos é

$$1 + 2 + \cdots + 9 = 45.$$

Solução: Seja S a soma dos três números de cada linha e seja x o número mostrado na figura 70.3. Como o 9, o 6 e x estão em duas linhas, a soma de todas as somas das linhas é

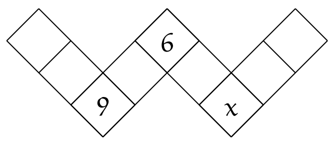


Figura 70.3

$$(1 + 2 + \cdots + 9) + (9 + 6 + x) = 45 + (15 + x) = 60 + x$$

que também é igual a $4S$. Assim,

$$4S = 60 + x \iff S = 15 + \frac{x}{4}.$$

Como a soma S é um número inteiro, x deve ser divisível por 4 e como x é um algarismo, temos que $x = 4$ ou $x = 8$, os quais correspondem a valores de S iguais a 16 ou 17, respectivamente.

Se $x = 4$, o número que falta na linha que contém o 6 deve ser

$$16 - 6 - 4 = 6,$$

o que não é possível, pois não podemos repetir números.

Logo, a única possibilidade é $x = 8$ e a soma dos elementos de cada linha é 17. Agora, basta combinar os demais números nas linhas e obter a distribuição mostrada na figura 70.4.

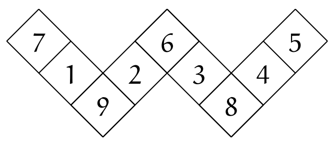


Figura 70.4

71 | Montando Tabelas

Sugestão: Somar $i - 1$ à primeira rodada equivale a somar 1 à rodada anterior.

Montar a tabela de um torneio em que todas as n equipes se enfrentam ao longo de $n-1$ rodadas (como, por exemplo, em cada turno do Brasileirão) é um problema matemático bastante elaborado e que possui vários métodos de solução. Nesta questão, vamos conhecer uma dessas abordagens.
Vamos considerar um torneio com 6 equipes. Associaremos os números 1, 2, 3, 4, 5 e ∞ (infinito) a cada uma das equipes. A primeira rodada do torneio é $1 \times \infty$, 2×5, 3×4. Para montarmos a rodada i somamos $i - 1$ a cada número envolvido nas partidas da rodada inicial, considerando que

- quando a soma ultrapassa 5, subtraímos 5 do resultado;
- ∞ adicionado a qualquer inteiro positivo é ∞. Por exemplo, a segunda rodada será:

$$\begin{gathered}(1+1) \times (\infty + 1), \text{ isto é, } 2 \times \infty \\ (2+1) \times (5+1), \text{ isto é, } 3 \times 1 \\ (3+1) \times (4+1), \text{ isto é, } 4 \times 5\end{gathered}$$

(a) Determine as 3 rodadas restantes do torneio, seguindo o método descrito acima.

(b) A partir do procedimento mostrado, exiba as 7 rodadas de um torneio com 8 equipes.

Solução:

(a)

$$\begin{pmatrix}1 \times \infty \\ 2 \times 5 \\ 3 \times 4\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2 \times \infty \\ 3 \times 1 \\ 4 \times 5\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}3 \times \infty \\ 4 \times 2 \\ 5 \times 1\end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix}4 \times \infty \\ 5 \times 3 \\ 1 \times 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}5 \times \infty \\ 1 \times 4 \\ 2 \times 3\end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{pmatrix}1 \times \infty \\ 2 \times 7 \\ 3 \times 6 \\ 4 \times 5\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}2 \times \infty \\ 3 \times 1 \\ 4 \times 7 \\ 5 \times 6\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}3 \times \infty \\ 4 \times 2 \\ 5 \times 1 \\ 6 \times 7\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}4 \times \infty \\ 5 \times 3 \\ 6 \times 2 \\ 7 \times 1\end{pmatrix} \to$$
$$\begin{pmatrix}5 \times \infty \\ 6 \times 4 \\ 7 \times 3 \\ 1 \times 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}6 \times \infty \\ 7 \times 5 \\ 1 \times 4 \\ 2 \times 3\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}7 \times \infty \\ 1 \times 6 \\ 2 \times 5 \\ 3 \times 4\end{pmatrix}$$

72 | Numerando os Vértices

Distribuímos nos vértices de um bloco retangular oito números dentre 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 de tal forma que a soma dos números de uma face qualquer seja igual a 18.

(a) Quais os números descartados na distribuição?

(b) Exiba uma possível distribuição.

Sugestão: Calcule as somas dos números de todas as faces do paralelepípedo e observe quantas vezes cada vértice está sendo contado nessa soma.

Fatos que Ajudam:

$$1 + 2 + \cdots + 10 = 55.$$

Solução:

(a) Como o bloco possui seis faces, a soma dos números em todas as faces é $18 \times 6 = 108$, mas o número atribuído a cada vértice é contado três vezes nesta soma. Portanto, a soma dos números distribuídos é $108/3 = 36$. Como a soma de todos os números de 1 a 10 é igual a 55, a soma dos dois números descartados é 19. Concluímos que os números descartados são 9 e 10.

(b) Uma possível distribuição é exibida na figura 72.1.

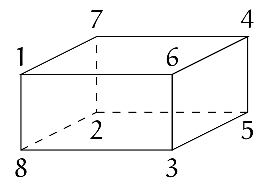


Figura 72.1

73 | Corrida de São Paulo a Fortaleza

Numa corrida de São Paulo a Fortaleza participam quatro carros A, B, C, D que largaram na seguinte ordem: primeiro A, segundo B, terceiro C e por último D. Durante a corrida, A e B trocaram de posição (ultrapassaram um ao outro) 9 vezes e B e C trocaram de posição 8 vezes.
Para saber em que ordem chegaram à Fortaleza, só é permitido fazer perguntas do tipo:

"Quantas vezes trocaram de posição os carros X e Y?"

Antes de fazer uma pergunta se conhece a resposta da pergunta anterior. Formule três perguntas que permitam determinar a ordem em que os quatro terminaram a corrida.

Sugestão: Observe que se dois carros trocam de posição duas vezes, a ordem entre eles continua a mesma.

Solução: Inicialmente, observe que se dois carros trocaram de posição um número par de vezes, eles terminaram na mesma ordem em que começaram e se trocaram de posição um número ímpar de vezes, eles terminaram na ordem inversa. Isto nos leva a concluir que B terminou a corrida na frente de A e de C.

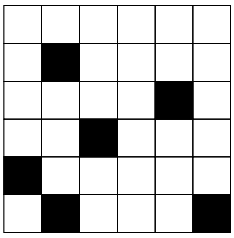
Fazemos a primeira pergunta sobre os carros A e C. De acordo com a resposta saberemos quem terminou na frente.

Suponhamos que A chegou na frente de C (o outro caso é análogo). Falta determinar a posição de D, para a qual há quatro possibilidades (à frente de B, entre B e A, entre A e C e atrás de C). Fazemos a segunda pergunta para A e D e dependendo de D chegar na frente ou atrás de A, perguntamos para B e D ou C e D, respectivamente. Com a última resposta descobriremos entre quais carros D chegou, determinando a ordem de chegada.

74 | Casas Pretas e Brancas

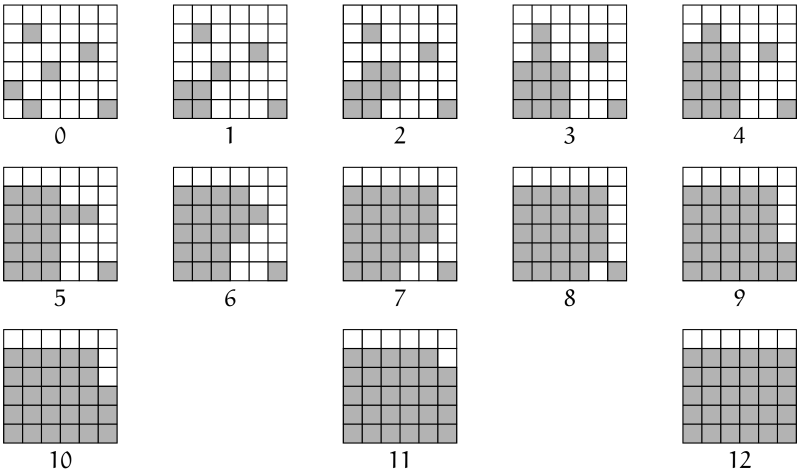
Considere um tabuleiro 6×6 com suas casas coloridas de branco ou preto. Duas casas são chamadas *vizinhas* se possuem um lado comum. A coloração do tabuleiro vai mudando a cada segundo, respeitando a seguinte condição: se num determinado segundo pelo menos duas casas vizinhas de uma determinada casa estão coloridas de preto, então no próximo segundo esta última casa será colorida de preto.

(a) A figura abaixo mostra uma possível coloração inicial. Como ficará o tabuleiro após 12 segundos? E após 13 segundos?

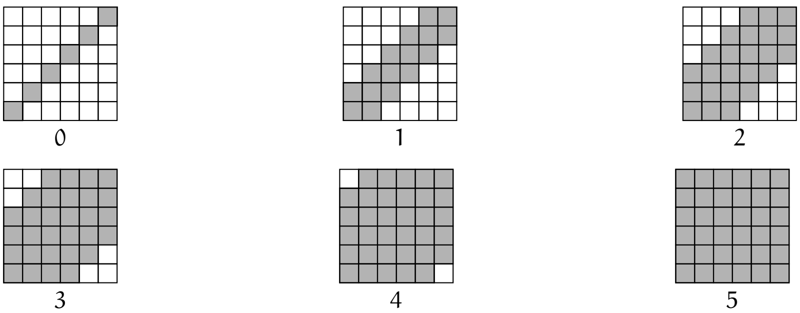


(b) Exiba uma coloração inicial com 6 casas pretas de modo que, em algum momento, todas as casas fiquem pretas.

Solução: (a) Seguem as colorações do tabuleiro a cada segundo. Observe que a partir de 12 segundos todos os tabuleiros são iguais.



(b) Colorimos inicialmente as casas de uma das diagonais. Após 5 segundos, todas as casas estarão pretas.



23. Desafios

Nível 2 | Soluções

75 | Ora Bolas!

Cinco bolas iguais estão se movendo na mesma direção ao longo de uma reta fixa, mantendo uma certa distância de uma para outra. Na mesma direção, mas no sentido oposto, outras cinco bolas se movem de encontro às primeiras. As velocidades de todas as bolas são iguais. Quando duas bolas colidem, voltam na mesma velocidade de antes, ao longo da mesma direção. Quantas colisões entre bolas vão ocorrer?

Solução:

Uma solução clara para o problema seria fazer todo o percurso das bolas, mas adotaremos outra estratégia.

Imagine que quando há a colisão de duas bolas, ao invés de gerar a volta das mesmas, uma bola se transforma na outra, como se não houvesse a colisão. Chamaríamos a esse processo de *transmutação*.

É claro que cada colisão do problema inicial corresponde a uma transmutação na nossa interpretação.

Mas o número de transmutações é bem mais fácil de calcular, porque as bolas não mudam de direção. As cinco bolas à esquerda encontrarão as cinco bolas à direita e o número procurado será então $5 \times 5 = 25$.

76 | Distância entre os Vilarejos

A estrada que liga dois vilarejos em uma montanha é formada somente por trechos de subida ou descida. Um ônibus sempre viaja a 15 km/h em trechos de subida e a 30 km/h em trechos de descida. Encontre a distância entre os vilarejos se o ônibus leva exatamente 4 horas para fazer a viagem completa de ida e volta.

Solução: Observe que os trechos de subida no percurso de ida são exatamente os trechos de descida para a volta e vice-versa. Assim, em uma viagem de ida e volta a distância percorrida nas subidas é igual a distância percorrida nas descidas.

Chamemos de d a distância entre os dois vilarejos. Como a distância total percorrida foi igual a 2d, então o tempo gasto subindo foi d/15 horas e o tempo gasto descendo foi $d/30$ horas. Como o tempo total foi 4 horas, temos

$$\frac{d}{15} + \frac{d}{30} = 4.$$

Resolvendo a equação, encontramos $d = 40$, ou seja, a distância entre os vilarejos é igual a 40 km.

77 | Amigos que você pode Contar!

Sugestão: Mostre que a situação do item (a) é possível e a do item (b) não.

Considere um grupo de 15 pessoas. É possível que cada uma delas conheça exatamente:

(a) 4 pessoas do grupo?

(b) 3 pessoas do grupo?

(Admita que se A conhece B então B conhece A.)

Solução:

(a) É possível. Representamos as 15 pessoas por pontos, conforme o diagrama ao lado. Um arco entre dois pontos significa que as duas pessoas representadas se conhecem. Como cada ponto está ligado a dois pontos à esquerda e a dois pontos à direita, saem quatro arcos de cada ponto, o que significa que é possível que cada pessoa conheça exatamente 4 pessoas do grupo.

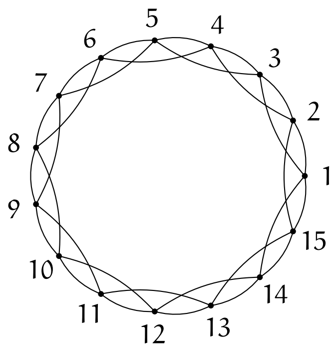


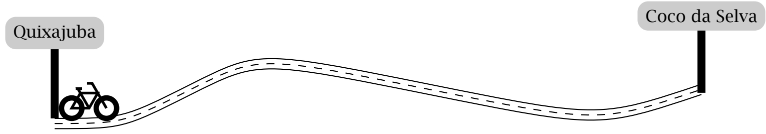
Figura 77.1

(b) Não é possível! Vamos representar as pessoas por pontos. Ligamos dois pontos se as pessoas representadas se conhecem. Quantos arcos vamos precisar traçar para representar todas as amizades? Cada ponto é extremidade de 3 arcos, resultando num total de $15 \times 3 = 45$ arcos que saem de todos os pontos. Porém, nesta contagem, cada arco foi contado duas vezes, nas duas extremidades. Portanto, o número de segmentos deve ser $45/2$, o que é um absurdo, pois este número não é inteiro.

78 | Três Amigos e uma Bicicleta

Sugestão: Perceba que para chegarem em até 2 h 40 min, cada um deve fazer pelo menos metade do percurso de bicicleta.

A distância entre Coco da Selva e Quixajuba é 24 km. Dois amigos precisam ir de Quixajuba a Coco da Selva e um terceiro amigo precisa ir de Coco da Selva a Quixajuba. Eles possuem uma bicicleta que inicialmente está em Quixajuba. Cada um deles pode ir caminhando a velocidade de 6 km/h, ou de bicicleta a velocidade de 18 km/h. Além disso, podem deixar a bicicleta em qualquer ponto do trajeto.



Mostre como eles podem proceder para chegarem a seus destinos em no máximo 2h 40min.

Solução: Chamaremos de A e B os amigos que estão em Quixajuba e C o que está em Coco da Selva. Nossos personagens podem seguir a seguinte estratégia:

- Na primeira hora, A vai de bicicleta enquanto B e C irão caminhando. Depois dessa hora, A e C se encontram no quilômetro 18 (medido desde Quixajuba) e B está no quilômetro 6.
- A continua caminhando e chegará a seu destino depois de uma hora. Enquanto isso, C continua de bicicleta e B fica parado esperando C chegar. Como a distância entre C e B é de 12 km, isso acontecerá depois de $12/18 = 2/3$ h, isto é, 40 minutos.
- Nesse ponto, C passa a bicicleta para B e cada um continua seu trajeto chegando a seus destinos em uma hora.

Assim o tempo total empregado por B e C foi de 2 h 40 min, enquanto A gastou 2 h.

79 | Contando Polígonos

Em uma circunferência foram marcados 15 pontos brancos e 1 ponto preto. Consideremos todos os possíveis polígonos (convexos) com seus vértices nestes pontos.
Vamos separá-los em dois tipos:

- Tipo 1: os que possuem somente vértices brancos.
- Tipo 2: os que possuem o ponto preto como um dos vértices.

Existem mais polígonos do tipo 1 ou do tipo 2? Quantos existem a mais?

Sugestão: Construa um polígono do tipo 2 a partir de um polígono do tipo 1.

Solução:

Observe que para cada polígono do tipo 1 podemos construir um polígono do tipo 2 adicionando o ponto preto.

Por outro lado, se temos um polígono do tipo 2 e retirarmos o ponto preto, a única forma de não gerar um polígono é se sobrarem exatamente dois pontos brancos.

Portanto, existem mais polígonos do tipo 2 do que do tipo 1.

Para calcular a diferença, basta contar o número de pares de pontos brancos. Para isso, observe que cada ponto branco pode formar um par com cada um dos outros 14 pontos brancos. Assim, como existem 15 pontos brancos, teremos 15×14 pares ordenados. Segue que temos $15 \times 14/2 = 105$ pares de pontos.

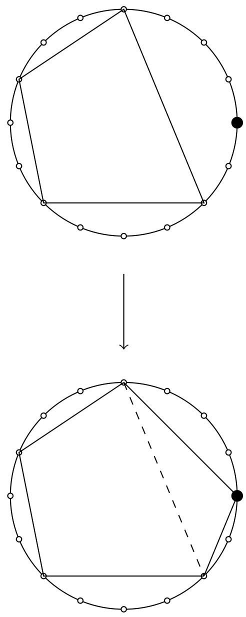


Figura 79.1

Observação: É possível determinar as quantidades de polígonos do tipo 1 e do tipo 2. Veja a caixa *Contando Subconjuntos*, na página 118.

80 | Desafiando os Amigos!

Sugestão:

(a) Suponha

$$a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e.$$

O que podemos dizer sobre $a+b$? E sobre $d+e$? E sobre $a+c$?

(b) Carlos não conseguirá alcançar seu objetivo porque existem dois conjuntos formados por quatro números que geram os números 10, 20, 22, 24, 26 e 36.

(a) Adriano escolheu secretamente cinco números a, b, c, d e e e informou a Bruna os dez números 24, 28, 30, 30, 32, 34, 36, 36, 40 e 42 obtidos pelo cálculo de todas as somas de dois números dentre os cinco escolhidos.

O objetivo de Bruna é descobrir a, b, c, d, e. Bruna pode alcançar seu objetivo?

(b) Adriano escolheu secretamente quatro números m, n, p e q e informou a Carlos os seis números 10, 20, 22, 24, 26 e 36 obtidos pelo cálculo de todas as somas de dois números dentre os quatro escolhidos.

O objetivo de Carlos é descobrir m, n, p e q. Ele pode alcançar seu objetivo?

Solução:

(a) Suponha que $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e$. Logo a menor soma é $a+b$ e a maior soma é $d+e$. A segunda menor é $a+c$ e a segunda maior é $c+e$. Assim, temos o sistema

$$\begin{cases} a+b=24 \\ a+c=28 \\ c+e=40 \\ d+e=42. \end{cases}$$

Por outro lado, cada número é utilizado em quatro somas e então

$$a+b+c+d+e = \frac{24+28+30+30+32+34+36+36+40+42}{4} = 83.$$

Assim,

$$c = (a+b+c+d+e) - (a+b) - (d+e) = 83 - 24 - 42 = 17.$$

Logo,

$$\begin{aligned} a &= 28 - c = 11 \\ b &= 24 - a = 13 \\ e &= 40 - c = 23 \\ d &= 42 - e = 19. \end{aligned}$$

(b) Observe que os números 3, 7, 17 e 19 geram as somas 10, 20, 22, 24, 26 e 36 e o mesmo acontece com os números 4, 6, 16 e 20. Carlos não alcançará seu objetivo!

Problema Relacionado

Uma lista de seis inteiros positivos p, q, r, s, t, u satisfaz $p < q < r < s < t < u$. Existem exatamente 15 pares de números que podem ser formados escolhendo dois números diferentes desta lista. As somas destes 15 pares de números são:

$$25, 30, 38, 41, 49, 52, 54, 63, 68, 76, 79, 90, 95, 103, 117.$$

Determine o valor da soma $r+s$.

Nível 3

81 | Sequência Numérica II

A sequência de números $t_1, t_2, t_3, \ldots$ está definida por

$$\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_{n+1} = \dfrac{t_n - 1}{t_n + 1} \end{cases}$$

para cada inteiro positivo n. Encontrar t_{2011}.

Sugestão: Calcule os primeiros cinco termos da sequência.

Solução: Calculemos os primeiros termos da sequência:

$$\begin{aligned} t_2 &= \frac{2-1}{2+1} = \frac{1}{3} \\ t_3 &= \frac{1/3-1}{1/3+1} = -\frac{1}{2} \\ t_4 &= \frac{-1/2-1}{-1/2+1} = -3 \\ t_5 &= \frac{-3-1}{-3+1} = 2. \end{aligned}$$

Assim, os primeiros cinco termos da sequência são 2, 1/3, $-1/2$, -3 e 2. Observamos que a sequência se repete a cada 4 termos, isto é,

$$2 = t_1 = t_5 = t_9 = t_{13} = \cdots = t_{2009}.$$

Assim, $t_{2010} = 1/3$ e $t_{2011} = -1/2$.

Problema Relacionado

A calculadora do Dodó tem uma tecla especial com o símbolo ☈ . Se o visor mostra um número x diferente de 2, ao apertar ☈ aparece o valor de $\frac{2x-3}{x-2}$.

(a) Se o Dodó colocar 4 no visor e apertar ☈ , qual número vai aparecer?

(b) Dodó colocou um número no visor e, ao apertar ☈ , apareceu o mesmo número. Quais são os números que ele pode ter colocado no visor?

(c) Dodó percebeu que, colocando o 4 no visor e apertando ☈ duas vezes, aparece de novo o 4; da mesma forma, colocando o 5 e apertando ☈ duas vezes, aparece de novo o 5. O mesmo vai acontecer para qualquer número diferente de 2? Explique.

82 | Progressão Geométrica

Sugestão: A razão da progressão geométrica tem que ser menor que 2.

A progressão geométrica 121, 242, 484, 968, 1936,... possui três termos inteiros entre 200 e 1200.

(a) Encontre uma progressão geométrica crescente que possui quatro termos inteiros entre 200 e 1200.

(b) Encontre uma progressão geométrica crescente que possui seis termos inteiros entre 200 e 1200.

Solução: Observemos que para obter termos inteiros, a razão entre os termos inteiros deve ser um racional $\frac{p}{q}$ e para obter mais de três termos a razão tem que ser menor do que 2, já que para uma progressão de razão maior ou igual a 2, com o primeiro termo maior ou igual a 200, o quarto termo é maior ou igual a $200 \times 2^3 = 1600$.

Como a progressão geométrica é da forma $A \cdot \frac{p^k}{q^k}$, para essa expressão representar um número inteiro precisamos que q divida A "muitas vezes". Assim, possíveis valores de A são as potências de q.

Por exemplo, se $A = 2^8 = 256$, $q = 2$ e $p = 3$, obtemos a sequência

$$256, 384, 576, 864, 1296, \ldots,$$

com quatro termos inteiros entre 200 e 1200.

Por outro lado, se $A = 3^5 = 243$, $q = 3$ e $p = 4$ obtemos a sequência

$$243, 324, 432, 576, 768, 1024, \ldots,$$

que possui seis termos inteiros entre 200 e 1200.

83 | Funciona?

Sugestão: Faça $a = \sqrt{2n+1}$ e $b = \sqrt{2n-1}$.

Fatos que Ajudam: Utilize a identidade

$$(a^2 + ab + b^2)(a - b) = a^3 - b^3.$$

Para um inteiro positivo n considere a função

$$f(n) = \frac{4n + \sqrt{4n^2 - 1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}.$$

Calcule o valor de

$$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(40).$$

Solução: Seja $a = \sqrt{2n+1}$ e $b = \sqrt{2n-1}$. Então $ab = \sqrt{4n^2-1}$, $a^2 + b^2 = 4n$ e $a^2 - b^2 = 2$. Portanto,

$$f(n) = \frac{a^2 + b^2 + ab}{a + b}.$$

Como $a - b \neq 0$, podemos escrever

$$f(n) = \frac{a^2 + b^2 + ab}{a + b} \cdot \frac{a - b}{a - b} = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} = \frac{(\sqrt{2n+1})^3 - (\sqrt{2n-1})^3}{2}.$$

Assim,

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(40) =$$

$$= \frac{(\sqrt{3})^3 - (\sqrt{1})^3}{2} + \frac{(\sqrt{5})^3 - (\sqrt{3})^3}{2} + \cdots + \frac{(\sqrt{81})^3 - (\sqrt{79})^3}{2} =$$

$$= \frac{(\sqrt{81})^3 - (\sqrt{1})^3}{2} = \frac{729 - 1}{2} = 364.$$

84 | Sistema de Três Equações

Sejam a e b números reais tais que existam números reais distintos m, n e p, satisfazendo as igualdades abaixo:

$$\begin{cases} m^3 + am + b = 0 \\ n^3 + an + b = 0 \\ p^3 + ap + b = 0. \end{cases}$$

Mostre que $m + n + p = 0$.

Sugestão: Subtraia as equações dadas e fatore o resultado. Depois, faça o mesmo com a primeira e a terceira equações.

Fatos que Ajudam: Diferença de dois cubos:

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2).$$

A soma das raízes da equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ é igual a $-b/a$.

Solução: Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos

$$\begin{gathered} m^3 - n^3 + am - an = 0 \iff \\ (m - n)(m^2 + mn + n^2) + a(m - n) = 0 \iff \\ (m - n)(m^2 + mn + n^2 + a) = 0 \end{gathered}$$

e como $m - n \neq 0$, temos que $m^2 + mn + n^2 + a = 0$. Subtraindo a terceira equação da primeira, obtemos de forma análoga $m^2 + mp + p^2 + a = 0$.

Subtraindo estas duas últimas relações encontradas, temos

$$\begin{gathered} mn - mp + n^2 - p^2 = 0 \iff \\ m(n - p) + (n + p)(n - p) = 0 \iff \\ (n - p)(m + n + p) = 0, \end{gathered}$$

e como $n - p \neq 0$, concluímos finalmente que $m + n + p = 0$.

Segunda Solução: Considere o polinômio de terceiro grau $P(x) = x^3 + 0x^2 + ax + b$. As relações dadas no problema nos garantem que m, n e p são as raízes de P. Portanto, a soma das raízes dessa equação é $m + n + p = 0$.

85 | Soma de Potências

(a) Mostre que a identidade abaixo é sempre verdadeira:

$$a^{n+1} + b^{n+1} = (a + b)(a^n + b^n) - ab(a^{n-1} + b^{n-1}).$$

(b) Sejam a e b números reais tais que $a + b = 1$ e $ab = -1$. Mostre que o número $a^{10} + b^{10}$ é inteiro, calculando seu valor.

Sugestão: Expanda

$$(a + b)(a^n + b^n).$$

Solução:

(a) Observemos que

$$\begin{aligned} (a + b)(a^n + b^n) &= a^{n+1} + ab^n + ba^n + b^{n+1} = \\ &= a^{n+1} + b^{n+1} + ab(a^{n-1} + b^{n-1}) \end{aligned}$$

e a identidade segue.

(b) Chamemos de $f_n = a^n + b^n$. Observe que $f_1 = a + b = 1$. Calculemos f_2:

$$f_2 = a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = 1^2 - 2 \cdot (-1) = 3.$$

Pela identidade do item (a) temos que

$$a^{n+1} + b^{n+1} = (a+b)(a^b + b^n) - ab(a^{n-1} + b^{n-1})$$

ou equivalentemente

$$f_{n+1} = (a+b)f_n - abf_{n-1} = f_n + f_{n-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} f_3 &= f_2 + f_1 = 4 \\ f_4 &= f_3 + f_2 = 7 \\ f_5 &= f_4 + f_3 = 11 \\ f_6 &= f_5 + f_4 = 18 \\ f_7 &= f_6 + f_5 = 29 \\ f_8 &= f_7 + f_6 = 47 \\ f_9 &= f_8 + f_7 = 76 \\ f_{10} &= f_9 + f_8 = 123. \end{aligned}$$

Portanto, $a^{10} + b^{10} = f_{10} = 123$.

86 | Sistema com Potências

(a) Verifique a identidade

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a).$$

(b) Resolva o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1. \end{cases}$$

Solução:

(a) Vamos expandir $(a+b+c)^3$ como $[(a+b)+c]^3$.

$$\begin{aligned} [(a+b)+c]^3 &= (a+b)^3 + 3(a+b)c(a+b+c) + c^3 \\ &= a^3 + b^3 + 3ab(a+b) + 3(a+b)c(a+b+c) + c^3 \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)[ab + c(a+b+c)] \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(c^2 + c(a+b) + ab] \\ &= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(c+a). \end{aligned}$$

(b) Utilizando a identidade verificada no item (a), obtemos

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + z^3 + 3(x+y)(y+z)(z+x).$$

Substituindo os valores de $x+y+z$ e $x^3+y^3+z^3$ chegamos a

$$1^3 = 1 + 3(x+y)(y+z)(z+x),$$

donde $(x+y)(y+z)(z+x) = 0$. Assim, $x = -y$ ou $y = -z$ ou $z = -x$. Como as soluções são simétricas, vamos supor $x = -y$. Logo, de $x+y+z = 1$, obtemos $z = 1$ e de $x^2+y^2+z^2 = 1$ obtemos $2x^2 = 0$, ou $x = 0$. Concluímos que as possíveis soluções são $(0,0,1)$, $(0,1,0)$ e $(1,0,0)$.

87 | Sistema com 7 Variáveis

Sugestão: (a) Expanda os termos e os agrupe como o polinômio na variável n. (b) Utilize os valores encontrados em (a).

Fatos que Ajudam: Se um polinômio se anula para infinitos valores, então todos os seus coeficientes são nulos.

(a) Determine a, b e c tais que a igualdade

$$(n+2)^2 = a(n+1)^2 + bn^2 + c(n-1)^2$$

seja verdadeira qualquer que seja o número n.

(b) Suponha que $x_1, x_2, \ldots, x_7$ satisfazem o sistema

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 1 \\ 4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 = 12 \\ 9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 = 123 \end{cases}$$

Determine o valor de

$$16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7.$$

Solução:

(a) Se um polinômio se anula para infinitos valores, então todos os seus coeficientes são nulos.

Expandindo a igualdade temos

$$n^2 + 4n + 4 = a(n^2 + 2n + 1) + bn^2 + c(n^2 - 2n + 1).$$

Assim,

$$(a + b + c - 1)n^2 + (2a - 2c - 4)n + (a + c - 4) = 0,$$

qualquer que seja o número n. Logo,

$$\begin{cases} a + b + c - 1 = 0 \\ 2a - 2c - 4 = 0 \\ a + c - 4 = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema encontramos $a = 3$, $c = 1$ e $b = -3$.

(b) Sejam

$$\begin{aligned} S_1 &= x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 1 \\ S_2 &= 4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 = 12 \\ S_3 &= 9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 = 123. \end{aligned}$$

Pela identidade da parte (a), temos que

$$\begin{aligned} &16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7 = \\ &= 3S_3 - 3S_2 + S_1 = 3 \cdot 123 - 3 \cdot 12 + 1 = 334. \end{aligned}$$

88 | Algarismo do Quadrado

Sugestão: Escreva o número como $10a + b$, sendo b um algarismo.

O quadrado de 13 é 169, que tem como algarismo das dezenas o número 6. O quadrado de outro número tem como algarismo das dezenas o número 7. Quais são os possíveis valores para o algarismo das unidades desse quadrado?

Solução: Suponhamos que o número é $10a+b$, com b um algarismo. Quando elevamos ao quadrado obtemos

$$(10a + b)^2 = 100a^2 + 20ab + b^2,$$

que tem três parcelas: $100a^2$, $20ab$ e b^2.

A primeira parcela termina em 00, enquanto a segunda termina em um número par seguido por zero. Assim para o algarismo das dezenas ser 7, isto é, ímpar, é necessário que o algarismo das dezenas de b^2 seja ímpar, o que somente acontece quando $b = 4$ ou $b = 6$. Em cada um dos casos, $4^2 = 16$ e $6^2 = 36$, o algarismo das unidades do quadrado é 6.

Problema Relacionado
Existe um número quadrado perfeito formado apenas por algarismos 0 e 6?

89 | Maior Divisor Ímpar

Sugestão: Sendo S_n a soma de tais divisores, calcule a diferença $S_n - S_{n-1}$.

Fatos que Ajudam: A soma dos n primeiros números ímpares é

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Seja n um número inteiro positivo. Para cada um dos inteiros $n + 1$, ..., $2n$ considere o seu maior divisor ímpar. Prove que a soma de todos estes divisores é igual a n^2.

Solução: Chamemos de S_n a soma dos maiores divisores ímpares dos números $n + 1, \ldots, 2n$. Por cálculo direto temos que $S_1 = 1$, $S_2 = 3 + 1 = 4 = 2^2$, $S_3 = 1 + 5 + 3 = 9 = 3^2$ e $S_4 = 5 + 3 + 7 + 1 = 16 = 4^2$.

Se queremos calcular S_{n+1}, que é a soma dos maiores divisores ímpares dos números

$$n + 2, n + 3, \ldots, 2n, 2n + 1, 2(n + 1),$$

como $n+1$ e $2(n+1)$ têm os mesmos divisores ímpares, isto é equivalente a somar os maiores divisores ímpares de

$$n + 2, n + 3, \ldots, 2n + 1, n + 1$$

que é igual a $S_n + (2n + 1)$. Assim, $S_{n+1} = S_n + (2n + 1)$. Portanto,

$$\begin{aligned} S_2 - S_1 &= 3 \\ S_3 - S_2 &= 5 \\ &\vdots \\ S_n - S_{n-1} &= 2n - 1. \end{aligned}$$

Somando todas estas igualdades obtemos $S_n - S_1 = 3 + 5 + \cdots + (2n - 1)$ e deste modo, $S_n = 1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

90 | Algarismos

Com os algarismos a, b e c construímos o número de três algarismos abc e os números de dois algarismos ab, bc e ca. Ache todos os possíveis valores de a, b e c tais que $\dfrac{abc+a+b+c}{ab+bc+ca}$ seja um número inteiro.

Sugestão: Mostre que o denominador é sempre divisível por 11 e que $a+c=11$.

Fatos que Ajudam: $abc = 100a + 10b + c$, $ab = 10a + b$.

Solução: Observemos que

$$ab + bc + ca = (10a + b) + (10b + c) + (10c + a) = 11(a + b + c),$$

de forma que o denominador da fração é divisível por 11. Como a fração é um inteiro, o numerador

$$abc + a + b + c = (100a + 10b + c) + a + b + c = 101a + 11b + 2c$$

também é divisível por 11. Como

$$101a + 11b + 2c = 11(9a + b) + 2(a + c),$$

segue que $a+c$ é divisível por 11. Como a e c são algarismos e $a \neq 0$, $1 \leqslant a + c \leqslant 18$, donde $a + c = 11$. Substituindo c na expressão dada obtemos

$$\begin{aligned}\frac{abc+a+b+c}{ab+bc+ca} &= \frac{11(9a+b+2)}{11(b+11)}\\ &= \frac{9a+b+2}{b+11}\\ &= \frac{b+11+9a-9}{b+11}\\ &= 1+\frac{9(a-1)}{b+11},\end{aligned}$$

e $9(a-1)/(b+11)$ é um inteiro. O algarismo a não pode ser 1, porque $a + c = 11$. Observamos que se $b + 11$ não é divisível por 3, teríamos que $b+11$ divide $a-1$ que é impossível, já que $b+11 > a-1$. Assim, $b + 11$ é igual a 12, 15 ou 18. Então $b = 1$, 4 ou 7.

- Se $b = 1$, como $9(a-1)/12 = 3(a-1)/4$ é inteiro temos que $a = 5$ ou 9 que gera os números 516 e 912.
- Se $b = 4$, $9(a-1)/15 = 3(a-1)/5$ é inteiro e assim, $a = 6$ que gera o número 645.
- Se $b = 7$, $9(a-1)/18 = (a-1)/2$ e então $a = 3$, $a = 5$, $a = 7$ ou $a = 9$ gerando os números 378, 576, 775 e 972.

25. Combinatória e Probabilidade

Nível 3 | Soluções

91 | Produto Par

Tio Mané tem duas caixas, uma com sete bolas distintas numeradas de 1 a 7 e outra com oito bolas distintas numeradas com todos os números primos menores que 20. Ele sorteia uma bola de cada caixa. Qual é a probabilidade de que o produto dos números das bolas sorteadas seja par?

Sugestão: Calcule a probabilidade do produto ser ímpar.

Solução: O produto dos números sorteados é ímpar somente se as duas bolas sorteadas têm números ímpares.

A probabilidade de sortearmos da primeira caixa uma bola com número ímpar é $4/7$ e a probabilidade de sortearmos uma bola ímpar da segunda caixa é $7/8$, porque esta contém bolas com os números $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$.

Assim, a probabilidade do produto dos números das caixas ser ímpar é

$$\frac{4}{7} \times \frac{7}{8} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a probabilidade do produto ser par é $1 - 1/2 = 1/2$.

92 | Subconjuntos com Soma Grande

Considere o conjunto $A = \{1, 2, 3, \ldots, 2011\}$. Quantos subconjuntos de A existem de modo que a soma de seus elementos seja 2023060?

Solução: Observe que a soma $1 + 2 + \cdots + 2011 = \dfrac{2011 \times 2012}{2} = 2023066$. Logo, para obtermos um subconjunto de A que tenha para soma de seus elementos 2023060, basta retirarmos de A os elementos cuja soma é 6. Os possíveis casos são:

- Subconjuntos com um elemento : $\{6\}$.
- Subconjuntos com dois elementos: $\{2, 4\}$ e $\{1, 5\}$.
- Subconjuntos com três elementos: $\{1, 2, 3\}$.

Portanto, há quatro subconjuntos de A cuja soma de seus elementos é 6 e por consequência também há quatro subconjuntos de A cuja soma dos elementos é 2023060.

93 | Formiga Aleatória

Sugestão: Observe que a formiga sempre está no 1 nos segundos ímpares.

Uma formiga se movimenta uma unidade por segundo sobre os pontos 0, 1 e 2 da figura a seguir, começando do ponto 0.

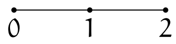


Figura 93.1

(a) Quais são os possíveis percursos da formiga até 3 segundos?

(b) Quantos possíveis percursos pode fazer a formiga até 10 segundos?

Solução:

(a) Até três segundos temos dois possíveis percursos: $0-1-0-1$ ou $0-1-2-1$.

(b) Observemos que quando a formiga está nos pontos 0 e 2 ela somente tem uma possibilidade para caminhar no segundo seguinte, que é ir para 1. Quando está em 1 ela tem duas possibilidades no segundo seguinte, que é ir para 0 ou 2. Assim, nos segundos ímpares a formiga sempre está no 1, enquanto nos segundos pares ela está no 0 ou no 2. Portanto, o número de caminhos possíveis depois de 10 segundos é

$$1\times 2\times 1\times 2\times 1\times 2\times 1\times 2\times 1\times 2=32.$$

94 | Algarismos e Paridade

Sugestão: Conte os números pares e os números ímpares separadamente.

Tiago escreve todos os números de quatro algarismos não nulos distintos que possuem a mesma paridade. Qual a probabilidade de que, ao escolhermos um desses números, ele seja par?

Solução: Os quatro algarismos escolhidos fazem parte dos conjuntos $A=\{1,3,5,7,9\}$ ou $B=\{2,4,6,8\}$.

Com os elementos do conjunto A temos 5 possibilidades para o primeiro algarismo, 4 para o segundo, 3 para o terceiro e 2 para o quarto, totalizando $5\times 4\times 3\times 2=120$ números com 4 algarismos distintos.

Já com os elementos do conjunto B temos 4 possibilidades para o primeiro algarismo, 3 para o segundo, 2 para o terceiro e 1 para o quarto, totalizando $4\times 3\times 2\times 1=24$ números com quatro algarismos distintos.

Assim, é possível formar $120+24=144$ números. De todas as possibilidades calculadas, apenas as geradas pelo conjunto B são números pares.

Portanto, a probabilidade pedida é $24/144=1/6$.

95 | Bolas Pretas, Brancas e Azuis

Considere uma urna que contém uma bola preta, quatro bolas brancas e algumas bolas azuis. Uma bola é retirada ao acaso dessa urna, sua cor é observada e a bola é devolvida à urna. Em seguida, retira-se novamente, ao acaso, outra bola dessa urna. Para quais quantidades de bolas azuis, a probabilidade das duas bolas retiradas terem mesma cor vale $1/2$?

Sugestão: Considere n o número de bolas azuis da urna e determine as probabilidades de as duas bolas retiradas serem ambas pretas, ambas brancas e ambas azuis.

Fatos que Ajudam: A probabilidade que aconteça um dentre três eventos independentes é a soma das probabilidades que cada um aconteça.

Solução: Chamemos de n o número de bolas azuis da caixa. Quando retiramos as duas bolas, elas podem ser:

- Duas bolas pretas. A probabilidade é

$$\frac{1}{n+5} \times \frac{1}{n+5} = \left(\frac{1}{n+5}\right)^2;$$

- Duas bolas brancas. A probabilidade é

$$\frac{4}{n+5} \times \frac{4}{n+5} = \left(\frac{4}{n+5}\right)^2;$$

- Duas bolas azuis. A probabilidade é

$$\frac{n}{n+5} \times \frac{n}{n+5} = \left(\frac{n}{n+5}\right)^2.$$

Logo, a probabilidade das duas bolas serem da mesma cor é a soma das probabilidades individuais:

$$\left(\frac{1}{n+5}\right)^2 + \left(\frac{4}{n+5}\right)^2 + \left(\frac{n}{n+5}\right)^2 = \frac{1+16+n^2}{(n+5)^2} = \frac{1}{2}.$$

Simplificando a igualdade obtemos que $n^2 - 10n + 9 = 0$, donde n é igual a 1 ou 9.

96 | Aparando um Poliedro

Considere um poliedro convexo com 100 arestas. Todos os vértices foram *aparados* próximos a eles mesmos, usando uma faca plana afiada (isto foi feito de modo que os planos resultantes não se intersectassem no interior ou na fronteira do poliedro). Calcule para o poliedro resultante:

(a) o número de vértices.

(b) o número de arestas.

Sugestão: Determine a relação entre as arestas do antigo poliedro e os vértices do novo.

Solução:

(a) Quando realizamos os cortes, cada aresta antiga estará ligada a dois vértices novos, enquanto os vértices antigos desaparecem. Assim o novo poliedro tem 200 vértices.

(b) Quando realizamos um corte, de cada novo vértice surgem duas arestas novas (correspondentes a duas arestas consecutivas na nova face criada) e uma aresta antiga. Assim, de cada vértice do novo poliedro saem exatamente 3 arestas. Deste modo, se somarmos a quantidade de arestas que partem de todos os vértices, encontraremos $3 \times 200 = 600$. Este número corresponde ao dobro do número de arestas, pois cada uma foi contada em dois vértices. Logo, o número de arestas é 300.

Quantas faces tem este novo poliedro?

97 | Bolas Azuis e Vermelhas

Fatos que Ajudam: O número de modos de escolher dois dentre n objetos distintos é $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Veja *Contando Subconjuntos* na página 118.

Existem bolas azuis e bolas vermelhas em uma caixa. A probabilidade de sortear duas bolas de cores diferentes, ao retirar duas bolas ao acaso, é $1/2$. Prove que o número de bolas na caixa é um quadrado perfeito.

Problema Relacionado

Em um torneio de xadrez cada jogador disputou uma partida com cada um dos demais participantes. A cada partida, havendo empate, cada jogador ganhou 1/2 ponto; caso contrário, o vencedor ganhou 1 ponto e o perdedor, 0 ponto. Participaram homens e mulheres e cada participante conquistou o mesmo número de pontos contra homens que contra mulheres. Mostre que o número total de participantes é um quadrado perfeito.

Solução: Suponha que existam a bolas azuis e v bolas vermelhas na caixa.

(1) O número de modos de escolher duas bolas de cores diferentes é av.

(2) O número de modos de escolher duas bolas quaisquer é $\binom{a+v}{2}$.

(3) De (1) e (2), a probabilidade de sortear duas bolas de cores diferentes é $av/\binom{a+v}{2}$.

Portanto,

$$\frac{av}{\binom{a+v}{2}} = \frac{1}{2} \iff 2av = \frac{(a+v)(a+v-1)}{2},$$

donde

$$4av = (a+v)^2 - (a+v) \iff a+v = (a-v)^2.$$

Logo, a quantidade de bolas é um quadrado perfeito.

98 | Dez Pontos no Plano

Fatos que Ajudam: O número de maneiras de escolher k objetos distintos dentre n objetos distintos é

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}.$$

Veja o quadro na página 118.

Dez pontos são dados no plano e não existem três colineares. Quatro segmentos distintos ligando pares destes pontos são escolhidos ao acaso, mas todos com a mesma probabilidade. Qual é a probabilidade de três dos segmentos escolhidos formarem um triângulo?

Solução: O número de possíveis segmentos entre os 10 pontos é $\binom{10}{2} = 45$ e o número de formas de escolher 4 desses segmentos é $\binom{45}{4}$.

Já o número de formas de escolher 4 segmentos de tal modo que três deles formem um triângulo é igual ao número de maneiras de escolher três vértices, que determinam os três segmentos do triângulo, multiplicado pelo número de formas de escolher o outro segmento, isto é $\binom{10}{3} \times (45-3)$. Portanto, a probabilidade de que três dos quatro segmentos formem um triângulo é

$$\frac{\binom{10}{3} \times 42}{\binom{45}{4}} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 42 \times 4!}{3! \times 45 \times 44 \times 43 \times 42} = \frac{16}{473}.$$

99 | Contando Diagonais no Poliedro

Um poliedro convexo $\mathcal{P}$ tem 26 vértices, 60 arestas e 36 faces. 24 faces são triangulares e 12 são quadriláteros. Uma *diagonal espacial* é um segmento de reta unindo dois vértices não pertencentes a uma mesma face. $\mathcal{P}$ possui quantas diagonais espaciais?

Sugestão: Conte o número total de segmentos determinados pelos vértices e retire os que não são diagonais espaciais.

Fatos que Ajudam: O número de modos de escolher dois objetos dentre n objetos distintos é $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$. Veja o quadro na página 118.

Solução: Os 26 vértices determinam exatamente $\binom{26}{2} = 26 \times 25/2 = 325$ segmentos. Destes segmentos, 60 são arestas e como cada quadrilátero tem duas diagonais, então temos $12 \times 2 = 24$ diagonais que não são espaciais.

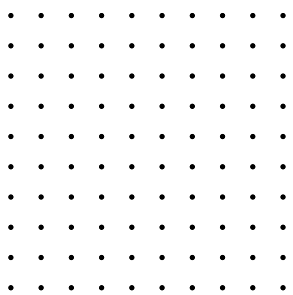
Portanto, o número de diagonais espaciais é $325 - 60 - 24 = 241$.

100 | Grade de Pontos

Uma grade de pontos com 10 linhas e 10 colunas é dada. Cada ponto é colorido de vermelho ou de azul. Sempre que dois pontos da mesma cor são vizinhos em uma mesma linha ou coluna, eles são ligados por um segmento da mesma cor dos pontos. Se dois pontos são vizinhos mas de cores diferentes, são ligados por um segmento verde. No total, existem 52 pontos vermelhos. Destes vermelhos, 2 estão nos cantos e outros 16 estão no bordo da grade. Os outros pontos vermelhos estão no interior da grade.

Sugestão: Conte o número total de segmentos e conte o total de segmentos que partem de pontos vermelhos.

Fatos que Ajudam: De pontos vermelhos não saem segmentos azuis.

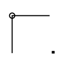


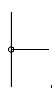
Existem 98 segmentos verdes. Determine o número de segmentos azuis.

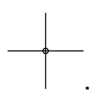
Solução: Inicialmente, observe que existem 9 segmentos em cada linha e em cada coluna, de modo que existem $9 \times 10 + 9 \times 10 = 180$ segmentos no total.

Seja A o número de segmentos azuis e V o número de segmentos vermelhos. Então $A + V + 98 = 180$, de modo que $A + V = 82$, já que existem 98 segmentos verdes.

Observe que dos pontos vermelhos, só podem partir segmentos vermelhos ou verdes. Vamos contar o total de segmentos que partem dos pontos vermelhos. Neste total os segmentos verdes são contados exatamente uma vez e os segmentos vermelhos duas vezes, pois os segmentos vermelhos ligam dois pontos vermelhos.

Partindo de um canto, existem 2 segmentos:  .

De um ponto sobre o bordo partem 3 segmentos  .

De um ponto interior partem 4 segmentos  .

Então, o número total de segmentos que partem dos vértices vermelhos é

$$2 \times 2 + 3 \times 16 + 4 \times 34 = 188,$$

mas como 98 segmentos que partem dos pontos vermelhos são os segmentos verdes, os restantes $188 - 98 = 90$ são vermelhos e foram contados duas vezes, de modo que $V = 45$.

Portanto, $A = 82 - V = 37$.

101 | Triângulo 20 – 40 – 120

Num triângulo ABC, o ângulo $A\hat{B}C$ mede $20°$ e o ângulo $A\hat{C}B$ mede $40°$. Seja E um ponto sobre BC tal que $BE = BA$.

(a) Mostre que o triângulo CEA é isósceles.

(b) Sabendo que o comprimento da bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$ é 2, determine $BC - AB$.

Sugestão: Determine as medidas dos ângulos que aparecem na construção.

Solução:

(a) Temos $C\hat{A}B = 180° - 20° - 40° = 120°$. Como o triângulo ABE é isósceles, segue que

$$A\hat{E}B = E\hat{A}B = \frac{180° - 20°}{2} = 80°.$$

Assim, $C\hat{A}E = 120° - 80° = 40°$ e o triângulo ACE tem dois ângulos de $40°$, e, portanto, é isósceles com $CE = EA$.

(b) Seja D o pé da bissetriz do ângulo $B\hat{A}C$. A bissetriz divide o ângulo $C\hat{A}B$ em dois ângulos de $60°$. Logo, o ângulo

$$C\hat{D}A = 180° - 40° - 60° = 80°.$$

Como $A\hat{E}B$ também mede $80°$, temos que o triângulo ADE é isósceles. Finalmente,

$$BC - AB = BC - BE = CE = EA = AD = 2.$$

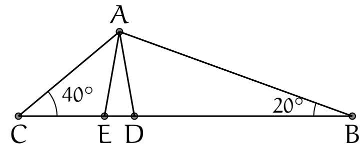


Figura 101.1

Problema Relacionado

O triângulo ABC é isósceles de base BC e $B\hat{A}C = 48°$. Os pontos D e E estão sobre os lados AB e AC, respectivamente, tais que $D\hat{C}A = 9°$ e $E\hat{B}C = 33°$. Determine a medida do ângulo $C\hat{D}E$.

102 | Um Problema Antigo!

Sugestão: Utilize o teorema de Pitágoras.

"Duas torres, uma com 30 passos e a outra com 40 passos de altura, estão à distância de 50 passos uma da outra. Entre ambas se acha uma fonte, para a qual dois pássaros descem no mesmo momento do alto das torres com a mesma velocidade e chegam ao mesmo tempo. Quais as distâncias horizontais da fonte às duas torres?"*(Leonardo de Pisa, Liber Abaci, 1202).*

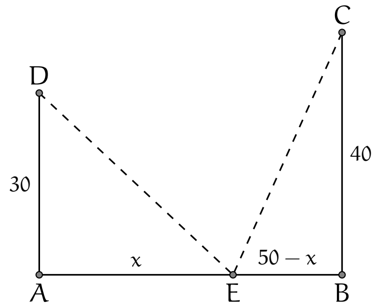


Figura 102.1

Solução:

Na figura, AD e BC representam as duas torres e o ponto E representa a posição da fonte. Como os dois pássaros chegam ao mesmo tempo, temos que $DE = EC$.

Denotemos por x a distância de A a E e assim $EB = 50 - x$. Usando o teorema de Pitágoras nos triângulos DAE e EBC, temos que

$$\begin{cases} DE^2 = 30^2 + x^2 \\ EC^2 = 40^2 + (50-x)^2. \end{cases}$$

Como $DE = EC$, temos:

$$900 + x^2 = 1600 + 2500 - 100x + x^2 \iff x = 3200/100 = 32.$$

Portanto, as distâncias horizontais da fonte às duas torres são $AE = x = 32$ passos e $EB = 50 - x = 18$ passos.

103 | Circunferências Tangentes

Sugestão: Trabalhe os ângulos dos triângulos isósceles AO_1C e BO_2C.

Fatos que Ajudam: Dadas duas circunferências tangentes, o ponto de tangência e os dois centros pertencem a uma mesma reta.

As circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ são tangentes à reta ℓ nos pontos A e B e tangentes entre si no ponto C. Prove que o triângulo ABC é retângulo.

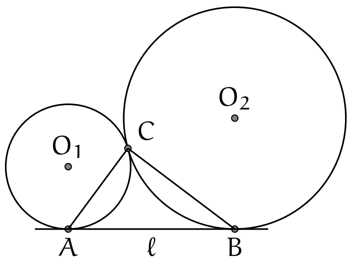


Figura 103.1

Solução: Como as circunferências são tangentes, então o ponto de tangência C e os centros O_1 e O_2 pertencem a uma mesma reta. Além disso, como as circunferências são tangentes a ℓ, então O_1A e O_2B são perpendiculares a ℓ e, portanto, paralelas.

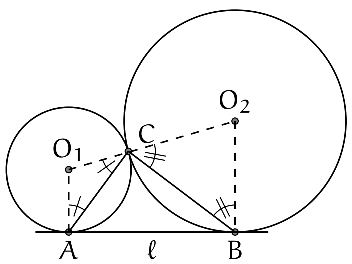


Figura 103.2

Seja α a medida do ângulo $O_1\hat{C}A$ e β a medida do ângulo $O_2\hat{C}B$. Como os triângulos AO_1C e BO_2C são isósceles, segue que $C\hat{A}O_1 = \alpha$ e $C\hat{B}O_2 = \beta$.

Como as retas O_1A e O_2B são paralelas, temos $A\hat{O}_1C + B\hat{O}_2C = 180°$, donde $180° - 2\alpha + 180° - 2\beta = 180°$. Portanto, $\alpha + \beta = 90°$.

Assim, $A\hat{C}B = 180° - (\alpha + \beta) = 90°$.

104 | Triângulo Isósceles II

Seja ABC um triângulo isósceles com $AB = AC$ e $\widehat{A} = 30°$. Seja D o ponto médio da base BC. Sobre AD e AB tome dois pontos P e Q, respectivamente, tais que $PB = PQ$. Determine a medida do ângulo $P\widehat{Q}C$.

Sugestão: Mostre que os ângulos $A\hat{Q}P$ e $A\hat{C}P$ somam $180°$.

Fatos que Ajudam: Um quadrilátero é inscritível se a soma dos ângulos opostos é $180°$. Ângulos inscritos no mesmo arco são iguais.

Solução: Observemos que

$$A\hat{B}C = A\hat{C}B = \frac{180° - 30°}{2} = 75°.$$

Como todos os pontos da altura AP estão à mesma distância de B e de C, em particular, o triângulo BPC é isósceles com $BP = PC$. Pela hipótese do problema, o triângulo BPQ também é isósceles. Denotemos por α a medida do ângulo $P\hat{B}C$, assim $B\hat{C}P = \alpha$ e

$$A\hat{Q}P = 180° - B\hat{Q}P = 180° - Q\hat{B}P = 180° - (75° - \alpha) = 105° - \alpha$$

e

$$P\hat{C}A = 75° - P\hat{C}B = 75° - \alpha.$$

Assim $A\hat{Q}P + P\hat{C}A = 180°$, portanto o quadrilátero $AQPC$ é inscritível, em particular $P\hat{Q}C = P\hat{A}C = 15°$.

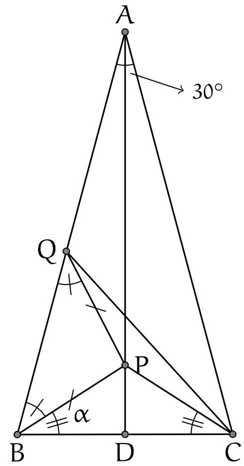


Figura 104.1

105 | Circunferência no Setor

Uma circunferência de raio r está inscrita em um setor circular de raio R. O comprimento da corda AB é igual a $2a$.

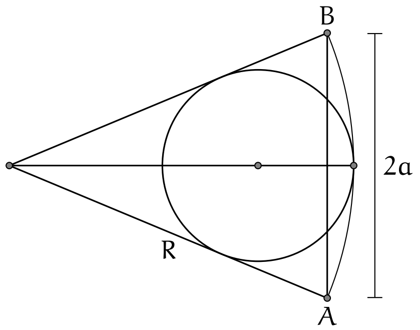


Figura 105.1

Prove que

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}.$$

Sugestão: Ligue o centro da circunferência inscrita no setor ao ponto de tangência desta com o raio do setor circular. Procure triângulos semelhantes.

Fatos que Ajudam: Se duas circunferências são tangentes, então o ponto de tangência e os centros das circunferências são colineares. Se uma reta é tangente a uma circunferência, então o segmento que une o centro da circunferência ao ponto de tangência é perpendicular à reta.

Solução: Denotemos por D o ponto de tangência de AO com a circunferência. Então $O\hat{D}O_1 = 90°$. Observe também que $AC = AB/2 = a$.

Por outro lado, $O\hat{C}A = 90°$. Os triângulos ODO_1 e OCA são semelhantes pois possuem um ângulo comum e um ângulo reto. Portanto,

$$\frac{OO_1}{OA} = \frac{O_1D}{AC},$$

isto é,

$$\frac{R-r}{R} = \frac{r}{a},$$

donde

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{R} = \frac{1}{r}.$$

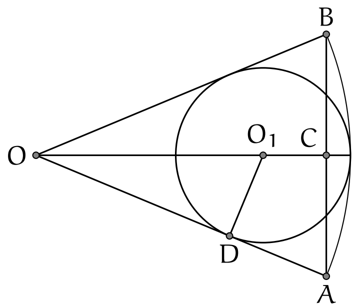


Figura 105.2

106 | Mais Circunferências Tangentes

Sugestão: (a) Trace uma reta pelo centro da menor circunferência, paralela à reta ℓ.

Fatos que Ajudam: Se duas circunferências são tangentes, então o ponto de tangência e os centros das circunferências são colineares. Se uma reta é tangente a uma circunferência, então o segmento que une o centro da circunferência ao ponto de tangência é perpendicular à reta.

(a) Duas circunferências de raios R e r são tangentes externamente (figura 106.1). Demonstre que o segmento determinado pela tangente comum externa ℓ mede $d = 2\sqrt{Rr}$.

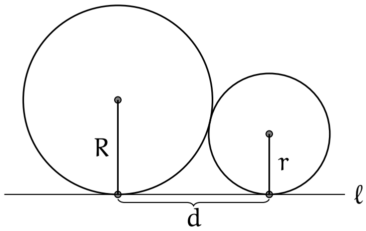


Figura 106.1

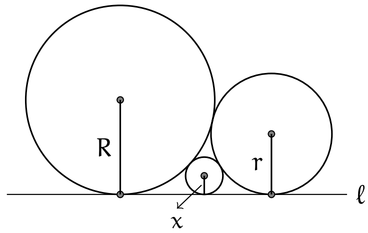


Figura 106.2

(b) Considere, como ilustrado na 106.2, as três circunferências de raios R, r e x, tangentes duas a duas e tangentes à reta ℓ. Mostre que

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{R}} + \frac{1}{\sqrt{r}}.$$

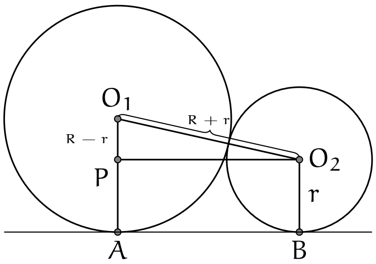


Figura 106.3

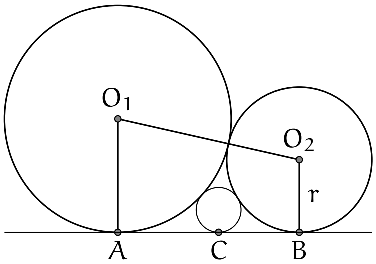


Figura 106.4

Solução: Sejam O_1 e O_2 os centros das circunferências e A e B os pontos de tangência com a reta ℓ, conforme ilustrado na figura 106.3.

(a) Seja P o ponto sobre O_1A tal que PO_2 é paralelo a AB. Como PO_2BA é um retângulo, então o triângulo O_1PO_2 é retângulo em P. Assim, pelo teorema de Pitágoras temos que

$$\begin{aligned} AB^2 = PO_2^2 &= (O_1O_2)^2 - (O_1P)^2 \\ &= (R+r)^2 - (R-r)^2 = 4Rr. \end{aligned}$$

Portanto, $AB = 2\sqrt{Rr}$.

(b) Seja C o ponto de tangência da terceira circunferência com a reta. Pelo item (a), sabemos que

$$AC = 2\sqrt{Rx}, \quad CB = 2\sqrt{xr} \quad \text{e} \quad AB = 2\sqrt{Rr}.$$

Segue que $2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{Rx} + 2\sqrt{xr}$, que dividindo por $2\sqrt{Rrx}$, obtém-se

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{R}}.$$

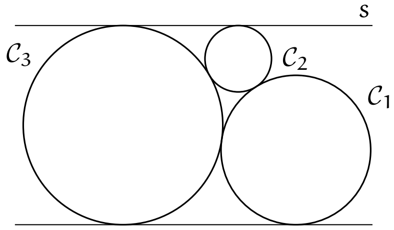


Figura 106.5 r

Problema Relacionado

A figura 106.5 mostra duas retas paralelas r e s. A reta r é tangente às circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_3$, a reta s é tangente às circunferências $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ e as circunferências tocam-se como também mostra a figura. As circunferências $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ têm raios a e b, respectivamente. Qual é o raio da circunferência $\mathcal{C}_3$?

107 | Reta Equilibrada

Seja ABC um triângulo tal que $AB = 55$, $AC = 35$ e $BC = 72$. Considere uma reta ℓ que corta o lado BC em D e o lado AC em E e que divide o triângulo em duas figuras com perímetros iguais e áreas iguais. Determine a medida do segmento CD.

Sugestão: Calcule a área do $\triangle CED$, a qual é metade da área do $\triangle ABC$.

Fatos que Ajudam: A área S de um triângulo que possui dois lados de medidas a e b e estes determinam um ângulo θ pode ser calculada pela fórmula

$$S = \frac{ab \operatorname{sen} \theta}{2}.$$

Demonstração: A área do triângulo da figura 107.1 é $ah/2$, mas $h = b \operatorname{sen} \theta$.

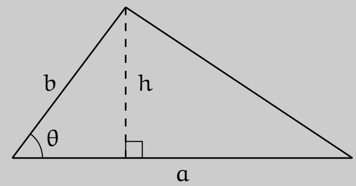


Figura 107.1

Então,

$$\frac{ah}{2} = \frac{ab \operatorname{sen} \theta}{2}.$$

Solução:

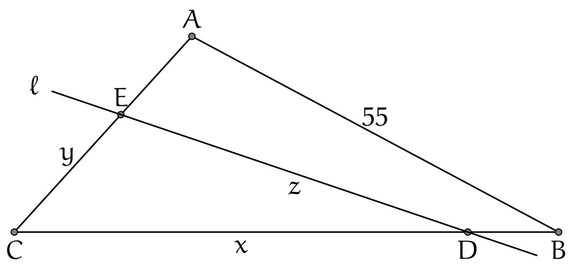


Figura 107.2

Sejam $CD = x$, $CE = y$ e $DE = z$.

(1) Como o triângulo CED tem o mesmo perímetro do quadrilátero $ABDE$, temos

$$x + y + z = (35 - y) + z + (72 - x) + 55 \iff y = 81 - x.$$

(2) Como eles também possuem a mesma área, a área do triângulo DCE deve ser igual à metade da área do triângulo ABC. Deste modo,

$$\frac{xy \operatorname{sen} \hat{C}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{35 \cdot 72 \cdot \operatorname{sen} \hat{C}}{2} \iff xy = 1260.$$

Utilizando as duas equações encontradas obtemos $x^2 - 81x + 1260 = 0$. Resolvendo esta equação, chegamos em $x = 60$ ou $x = 21$. No primeiro caso obtemos $y = 21$ e no segundo $y = 60$. Como E está sobre o lado AC, devemos ter $y \leqslant 35$ e então a solução que nos interessa é $x = 60$ e $y = 21$. Portanto, $CD = 60$.

108 | Alturas e Pontos Médios

O triângulo acutângulo ABC de ortocentro H é tal que $AB = 48$ e $HC = 14$. O ponto médio do lado AB é M e o ponto médio do segmento HC é N.

(a) Mostre que o ângulo $M\hat{E}N$ é reto.

(b) Determine o comprimento do segmento MN.

Sugestão: Mostre que os triângulos BME e HEN são isósceles.

Fatos que Ajudam: O ortocentro de um triângulo é o ponto de intersecção das alturas. Em um triângulo retângulo, a mediana relativa a hipotenusa tem comprimento igual a metade da hipotenusa.

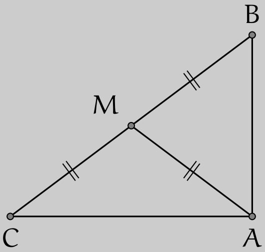


Figura 108.1

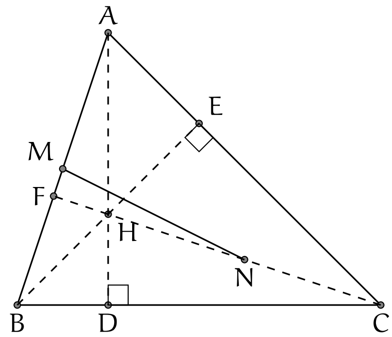


Figura 108.2

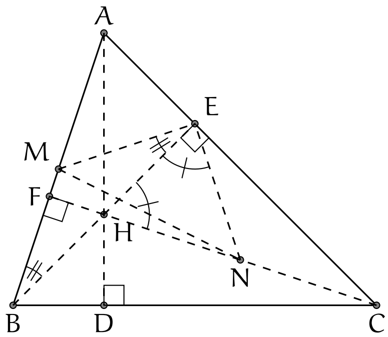


Figura 108.3

Solução: Inicialmente observe que ME é mediana relativa à hipotenusa do triângulo AEB. Portanto, $ME = AM = MB = 24$. Desse fato segue que o triângulo BME é isósceles. Então $M\hat{E}B = M\hat{B}E = \beta$. Analogamente, como N é o ponto médio da hipotenusa do triângulo HEC, temos $EN = HN = NC = 7$ e o triângulo HNE é isósceles. Assim, $H\hat{E}N = E\hat{H}N = \alpha$.

O triângulo FHB é retângulo em F e $F\hat{H}B + H\hat{B}F = \alpha + \beta = 90°$. Assim, o triângulo MEN é retângulo em E. Aplicando o teorema de Pitágoras neste triângulo, obtemos

$$MN^2 = ME^2 + EN^2$$
$$MN^2 = 24^2 + 7^2 = 625,$$

donde $MN = 25$.

109 | É Proibido usar Régua!

(a) Sejam $\mathcal{C}$ uma circunferência com centro O e raio r e X um ponto exterior a $\mathcal{C}$. Construímos uma circunferência de centro em X passando por O, a qual intersecta $\mathcal{C}$ nos pontos P e Q. Com centro em P construímos uma circunferência passando por O e com centro em Q construímos uma outra circunferência passando por O. Estas duas circunferências intersectam-se nos pontos O e Y.

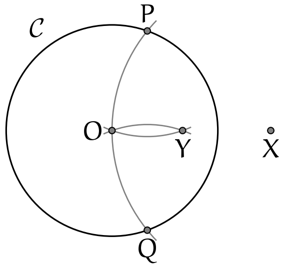


Figura 109.2

Prove que $OX \times OY = r^2$.

(b) É dado um segmento AB. Mostre como construir, usando somente compasso, um ponto C tal que B seja o ponto médio do segmento AC.

(c) É dado um segmento AB. Mostre como construir, usando somente compasso, o ponto médio do segmento AB.

Sugestão: (a) Mostre que os triângulos XOP e PYO são semelhantes. (b) Tente obter o ponto C construindo triângulos equiláteros. (c) Utilize os itens (a) e (b).

Fatos que Ajudam: Dados dois pontos D e E, podemos construir um ponto F, utilizando somente compasso, tal que o $\triangle DEF$ seja equilátero. O ponto F pode ser obtido como um dos dois pontos de interseção da circunferência de centro em D que contém E e da circunferência de centro em E que contém D.

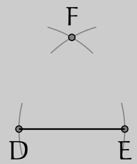


Figura 109.1

Solução:

(a) Observe que os triângulos XOP e PYO são ambos isósceles, de bases OP e YO, respectivamente. Estes triângulos possuem ângulos da base de mesma medida, pois o ângulo $P\hat{O}X = Y\hat{O}P$ é comum aos dois triângulos. Deste modo, os triângulos XOP e PYO são semelhantes e podemos escrever $OX/OP = OP/OY$, e, como $OP = r$, concluímos que $OX \times OY = r^2$.

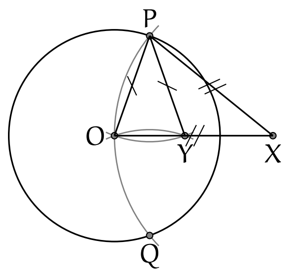


Figura 109.3

(b) Determinamos um ponto R tal que o triângulo ABR seja equilátero. Em seguida, determinamos um ponto $S \neq A$ de modo que o triângulo RBS seja equilátero e construímos $C \neq R$ de forma que o triângulo BSC também seja equilátero. Assim, $BC = BS = BR = AB$ e A, B e C são colineares ($A\hat{B}C = 60° + 60° + 60° = 180°$), logo B é o ponto médio de AC.

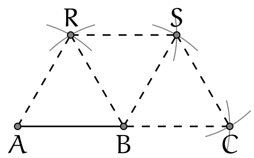


Figura 109.4

(c) Seja M o ponto médio de AB. Construa a circunferência com centro em A e raio $r = AB$. Como no item anterior, com o compasso construímos um ponto C tal que B é o ponto médio de AC.

Observe que $AM \times AC = (r/2) \times 2r = r^2$ e, portanto, podemos construir o ponto M utilizando o processo de construção do item (a): *determinamos os pontos P e Q, pontos de interseção da circunferência de centro C que contém A e da circunferência de centro A que contém B. O ponto M é obtido pela interseção das circunferências de centros P e Q que passam por A.*

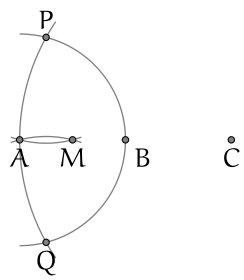


Figura 109.5

Problema Relacionado

É dada uma circunferência $\mathcal{C}$. Construir, usando somente compasso, o centro de $\mathcal{C}$.

110 | Pés das Perpendiculares

Seja ABC um triângulo acutângulo com alturas BD e CE. Os pontos F e G são os pés das perpendiculares BF e CG a reta DE. Prove que $EF = DG$.

Sugestão: Mostre que os triângulos BEF e BCD são semelhantes.

Fatos que Ajudam: Sejam X, B e C pontos no plano tais que $B\hat{X}C = 90°$.

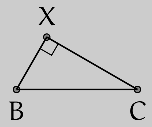


Figura 110.1

Então o ponto X está sobre a circunferência de diâmetro BC.

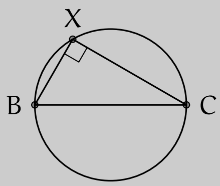


Figura 110.2

Se Y é outro ponto qualquer do arco XC, então $C\hat{X}Y = C\hat{B}Y$, porque estes ângulos medem a metade do arco YC.

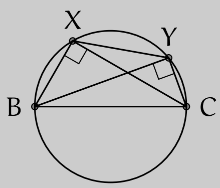


Figura 110.3

Solução:

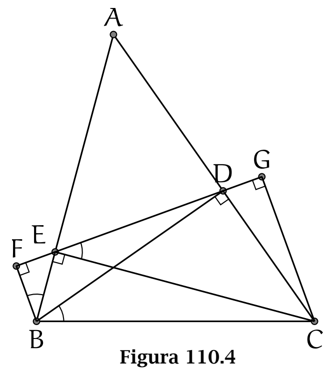


Figura 110.4

Os ângulos $F\hat{B}E$ e $D\hat{E}C$ possuem a mesma medida, pois ambos são o complemento do ângulo $F\hat{E}B$.

Observe que o quadrilátero BCDE é inscritível. De fato, a circunferência de diâmetro BC contém E e D, pois $B\hat{E}C = B\hat{D}C = 90°$.

Segue que $F\hat{B}E = D\hat{E}C = D\hat{B}C$.

Portanto, $\triangle BEF \sim \triangle BCD$ e obtemos

$$\frac{EF}{DC} = \frac{BE}{BC} \Longrightarrow EF = \frac{BE \times DC}{BC}.$$

Analogamente, o triângulo CDG é semelhante ao triângulo CBE, donde obtemos

$$DG = \frac{DC \times BE}{BC},$$

e segue que $EF = DG$.

27. Diversos

Nível 3 | Soluções

111 | Jogo Triangulário

Um jogo solitário é realizado em um tabuleiro no formato de triângulo equilátero, mostrado na figura 111.1. Sobre cada círculo coloca-se uma ficha. Cada ficha é branca de um lado e preta do outro. Inicialmente, só a ficha que está situada em um vértice tem a face preta para cima e as outras fichas têm a face branca para cima. Em cada movimento, retira-se uma ficha preta do tabuleiro e cada uma das fichas que ocupam um círculo vizinho à ficha retirada são viradas. Círculos vizinhos são os que estão unidos por um segmento.

Sugestão: Observe que para uma ficha poder ser retirada ela teve que ser virada um número ímpar de vezes, e todos os círculos têm um número par de vizinhos.

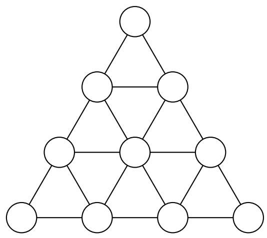


Figura 111.1

Após vários movimentos, será possível tirar todas as fichas do tabuleiro?

Solução: Suponha que seja possível remover todas as fichas do tabuleiro e vejamos a última ficha removida. Ela deve ser preta para que possamos removê-la, mas também é preciso que todas as fichas vizinhas tenham sido removidas. Como no tabuleiro, cada círculo tem um número par de vizinhos, a última ficha trocou de cor um número par de vezes. Logo, ela era inicialmente preta. Mas no início do jogo, há somente uma ficha preta e o primeiro movimento do jogo foi removê-la, o que é absurdo.

Portanto, não é possível remover todas as fichas do tabuleiro.

112 | Bolas nas Caixas

Duas caixas contêm juntas 65 bolas de vários tamanhos. Cada bola é branca, preta, vermelha ou amarela. Cada vez que pegamos cinco bolas da mesma cor, pelo menos duas são do mesmo tamanho.

Sugestão: Existem no máximo 4 tamanhos distintos de bolas para cada cor.

(a) Qual é o número máximo de tipos de bolas que existem nas caixas? Duas bolas são consideradas de tipos distintos quando têm diferentes cores ou tamanhos.

(b) Mostrar que existem pelo menos três bolas, que estão na mesma caixa, e que são do mesmo tipo.

Solução:

(a) Não podem existir cinco bolas da mesma cor e tamanhos diferentes porque cada vez que pegamos cinco bolas da mesma cor, duas devem ser do mesmo tamanho. Assim, existem no máximo quatro tamanhos para cada cor. Logo, existem no máximo $4 \times 4 = 16$ tipos de bolas.

(b) As duas caixas possuem juntas, 65 bolas e uma delas deve conter no mínimo 33 bolas. Por outro lado, existem no máximo 16 tipos de bolas e como $2 \times 16 = 32 < 33$, concluímos que essa caixa contém três ou mais bolas do mesmo tipo.

113 | Frações Irredutíveis

Sugestão: Sendo $a/600$ e $b/700$ as duas frações, verifique quais fatores o numerador e o denominador da soma podem ter em comum.

Fatos que Ajudam: Uma fração é dita irredutível se o numerador e o denominador não possuem fatores primos em comum.

Duas frações irredutíveis têm seus denominadores iguais a 600 e 700. Encontrar o valor mínimo para o denominador da soma das frações.

Solução: Suponhamos que as frações são $a/600$ e $b/700$. Como são irredutíveis, então a e 600 não têm fator comum maior que 1 e o mesmo acontece com b e 700.

Somando as duas frações obtemos

$$\frac{a}{600} + \frac{b}{700} = \frac{7a + 6b}{4200} = \frac{7a + 6b}{2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7}.$$

Observe que o numerador não é divisível nem por 2 e nem por 3, porque a não tem fator comum com 6. O numerador também não é divisível por 7 porque b e 7 não têm fator comum.

Assim, o único fator do denominador que possivelmente podemos simplificar é $5^2 = 25$. Para isto basta pegar, por exemplo, $a = 1$ e $b = 3$.

$$\frac{1}{600} + \frac{3}{700} = \frac{1}{168}.$$

Portanto, o denominador mínimo da soma é 168.

114 | Soma das Quintas Potências

Sugestão: Observe que os valores particulares de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ não são importantes e sim a quantidade destes que são iguais a 1 e -2.

Seja $x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma sequência na qual cada termo é 0, 1 ou -2. Se

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -5 \\ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 19 \end{cases},$$

determine $x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_n^5$.

Solução: Sejam a a quantidade de termos iguais a 1 e b a quantidade de termos iguais a -2. Podemos escrever:

$$\begin{cases} a \cdot 1 + b \cdot (-2) = -5 \\ a \cdot 1^2 + b \cdot (-2)^2 = 19 \end{cases} \iff \begin{cases} a - 2b = -5 \\ a + 4b = 19. \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $a = 3$ e $b = 4$. Logo,

$$x_1^5 + x_2^5 + \cdots + x_n^5 = a \cdot 1^5 + b \cdot (-2)^5 = 3 - 4 \cdot 32 = -125.$$

115 | Comendo Pizzas

Um grupo de meninos e meninas se reúne para comer pizzas que são cortadas em 12 pedaços. Cada menino pode comer 6 ou 7 pedaços e cada menina pode comer 2 ou 3 pedaços. Sabemos que quatro pizzas nunca são suficientes para alimentar o grupo e que com cinco pizzas sempre há sobra. Quantos meninos e quantas meninas formam o grupo?

Sugestão: Analise a quantidade mínima e máxima de pedaços que o grupo pode comer.

Solução: Chamemos de x o número de meninos e de y o número de meninas. Pelas condições do problema sabemos que se eles comem o mínimo possível, ainda assim quatro pizzas não são suficientes, isto é,

$$6x + 2y > 4 \times 12 = 48.$$

Por outro lado, se eles comem o máximo possível, com cinco pizzas sobrará, isto é,

$$7x + 3y < 5 \times 12 = 60.$$

Assim, precisamos encontrar dois números naturais x e y que satisfaçam simultaneamente

$$\begin{cases} 3x + y > 24 \\ 7x + 3y < 60. \end{cases}$$

Como $7x \leqslant 7x + 3y < 60$, $x < 60/7 < 9$, logo o número de meninos é menor ou igual a 8.

Por outro lado, como x e y são inteiros, então $3x + y \geqslant 25 > 24$, multiplicando por 3, obtemos $9x + 3y \geqslant 75$, e como $-7x - 3y > -60$, somando estas duas desigualdades (as duas têm o mesmo sentido), encontramos que $2x > 75 - 60 = 15$, ou $x > 7,5$. Portanto, o número de meninos é 8.

Substituindo $x = 8$ nas desigualdades obtemos $y > 0$ e $3y < 4$, que tem como única solução $y = 1$. Assim, o grupo tem oito meninos e uma menina.

Comentário: O problema também pode ser resolvido geometricamente. A solução é o único ponto com coordenadas inteiras que está no interior da região delimitada pelo eixo x e pelas retas $3x + y = 24$ e $7x + 3y = 60$. A figura 115.1 ilustra a situação.

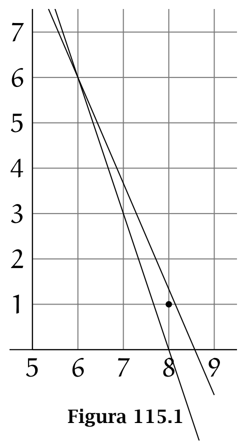


Figura 115.1

28. Desafios

Nível 3 | Soluções

116 | Quatro Cores no Tabuleiro

Considere o tabuleiro 9×9 mostrado abaixo. As linhas estão numeradas de 1 a 9.

Sugestão: Para o item (b), verifique quantas casas de cada cor são cobertas ao colocar uma peça no tabuleiro.

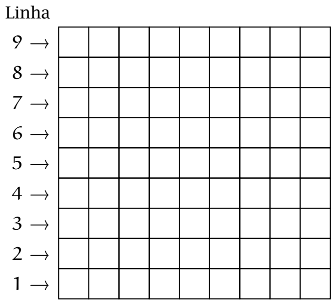
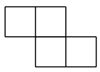


Figura 116.1

Colorimos as casas das linhas ímpares do tabuleiro com as cores azul e branco, alternadamente, começando com azul e pintamos as casas das linhas pares do tabuleiro de cinza e vermelho, alternadamente, começando com a cor cinza.

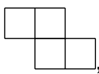
(a) Quantas casas foram pintadas com cada cor?

(b) Qual é o número máximo de peças da forma  que podem ser colocadas, sem sobreposição, nesse tabuleiro?

Solução:

(a) Cada linha ímpar contém 5 casas azuis e 4 casas brancas. Como o tabuleiro tem 5 linhas ímpares, o número de casas azuis é $5 \times 5 = 25$ e o número de casas brancas é $5 \times 4 = 20$.

Do mesmo modo, cada linha par tem 5 casas cinzas e 4 casas vermelhas e o tabuleiro tem 4 linhas pares. Assim, o número de casas cinzas é $4 \times 5 = 20$ e o número de casas vermelhas é $4 \times 4 = 16$.

(b) Não importa como coloquemos a peça , ela sempre vai cobrir uma casa de cada cor no tabuleiro. Como o tabuleiro tem apenas 16 casas vermelhas, o número de peças tem que ser menor ou igual a 16.

Exibimos na figura 116.2 uma configuração com exatamente 16 peças.

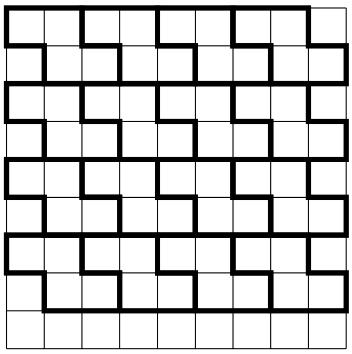


Figura 116.2

Problema Relacionado

É possível dividir um tabuleiro 8×9 em retângulos 1×6?

Sugestão: Veja o problema **Números no Tabuleiro** 4×4, do nível 1, na página 100.

117 | Números no Tabuleiro 8 x 8

Guilherme escreveu um número em cada casa de um tabuleiro 8×8 de modo que a soma dos números das casas vizinhas de cada casa do tabuleiro é igual a 1. Calcule a soma de todos os números escritos por Guilherme.
Observação: duas casas são vizinhas se possuem um lado em comum.

Solução: Numere as casas do tabuleiro conforme mostrado na figura 117.1.

A soma dos números das casas marcadas com um mesmo número é igual a 1, porque elas são as vizinhas a uma determinada casa.

1	2	1	7	8	7	8	9
2	1	3	6	7	8	9	10
4	3	6	3	6	11	10	9
5	4	3	6	11	12	11	10
4	5	18	17	12	11	12	13
5	18	17	18	17	12	13	14
19	20	18	17	16	15	14	13
20	19	20	16	15	16	15	14

Figura 117.1

Logo, a soma de todos os números do tabuleiro é igual a 20.

Sugestão: Analise a área do triângulo determinado pelas posições das formigas.

Fatos que Ajudam: A área de um triângulo não muda quando um dos vértices se movimenta sobre uma reta paralela à reta formada pelos outros dois vértices.

118 | Formigas Geométricas!

Três formigas estão paradas em três dos quatro vértices de um retângulo no plano. As formigas se movem no plano uma por vez. A cada vez, a formiga que se move o faz segundo a reta paralela à determinada pelas posições das outras duas formigas. É possível que, após alguns movimentos, as formigas se situem nos pontos médios de três dos quatro lados do retângulo original?

Solução: Observe que, se uma formiga A se movimenta sobre uma reta paralela à reta determinada pelas outras duas formigas B e C, então a área do triângulo com vértices sobre as três formigas é invariante, já que a base BC e a medida da altura do triângulo com relação ao lado BC não mudam.

Inicialmente, a área do triângulo ABC é a metade da área do retângulo. Porém, se as formigas conseguissem chegar aos pontos médios, a área determinada por elas seria $1/4$ da área do retângulo.

Como a área não é a mesma, é impossível que as formigas se situem nos pontos médios dos lados do retângulo, a partir da configuração inicial.

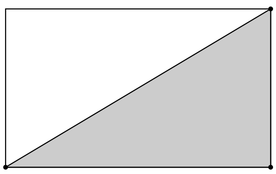


Figura 118.1

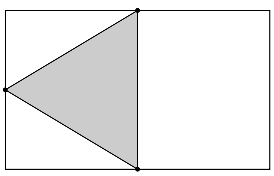


Figura 118.2

119 | Ponto no Interior do Quadrado

P é um ponto no interior do quadrado $ABCD$ tal que $PA = 1$, $PB = 2$ e $PC = 3$. Qual é a medida do ângulo $A\hat{P}B$?

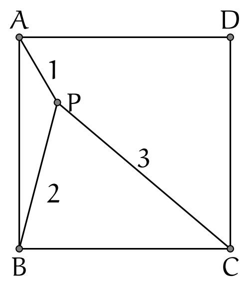


Figura 119.1

Sugestão: Determine um ponto Q exterior ao quadrado, tal que o triângulo APB seja congruente ao triângulo CQB.

Fatos que Ajudam: Se a, b e c são as medidas dos lados de um triângulo e $a^2 = b^2 + c^2$, então o ângulo oposto ao lado de medida a é reto.

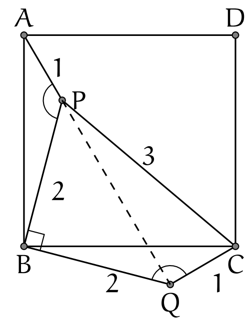


Figura 119.2

Solução: Seja Q um ponto tal que os triângulos CQB e APB são congruentes, como mostrado na figura. Isto é equivalente a fazer uma rotação do triângulo APB com centro em B e ângulo $90°$ no sentido horário. Em particular, temos que $P\hat{B}Q = 90°$. Assim, $PQ^2 = PB^2 + BQ^2 = 2^2 + 2^2$, donde $PQ = 2\sqrt{2}$.

Por outro lado,

$$PC^2 = 9 = 8 + 1 = PQ^2 + QC^2$$

e segue que o triângulo PCQ é retângulo com ângulo reto em Q.

Portanto, $A\hat{P}B = B\hat{Q}C = B\hat{Q}P + P\hat{Q}C = 45° + 90° = 135°$.

Problema Relacionado

Seja P um ponto no interior do triângulo equilátero ABC tal que:

$$PA = 5, \quad PB = 7, \quad \text{e} \quad PC = 8.$$

Determine a medida do lado do triângulo ABC.

120 | Pontos no Interior do Disco

Sugestão: Para o item (b), ordene os pontos de coordenadas inteiras em ordem crescente de distância a $(\sqrt{2}, 1/3)$.

Fatos que Ajudam: A distância entre os pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) é dada pela expressão

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

O produto de um número racional não nulo por um número irracional é um número irracional.

(a) Mostre que não existem dois pontos com coordenadas inteiras no plano cartesiano que estão igualmente distanciados do ponto $(\sqrt{2}, 1/3)$.

(b) Mostre que existe um círculo no plano cartesiano que contém exatamente 2011 pontos com coordenadas inteiras em seu interior.

Solução:

(a) Suponhamos que os (a, b) e (c, d) são pontos com coordenadas inteiras que estão igualmente distanciados do ponto $(\sqrt{2}, 1/3)$. Assim,

$$\sqrt{(a - \sqrt{2})^2 + \left(b - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{(c - \sqrt{2})^2 + \left(d - \frac{1}{3}\right)^2}.$$

Deste modo,

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - \frac{2b}{3} + \frac{2d}{3} = 2\sqrt{2}(a - c).$$

Como a parte esquerda desta igualdade é racional, devemos ter $a - c = 0$ e consequentemente

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 - \frac{2b}{3} + \frac{2d}{3} = 0.$$

Portanto,

$$b^2 - d^2 - \frac{2b}{3} + \frac{2d}{3} = (b - d)\left(b + d - \frac{2}{3}\right) = 0,$$

e como $b + d - 2/3 \neq 0$, segue que $b - d = 0$, isto é (a, b) e (c, d) são o mesmo ponto.

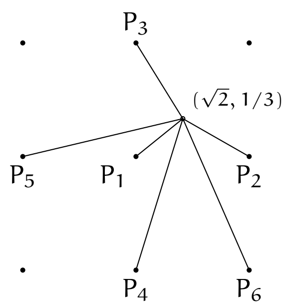


Figura 120.1

(b) Pelo item (a), não existem dois pontos de coordenadas inteiras à mesma distância de $(\sqrt{2}, 1/3)$. Podemos então ordenar estes pontos em ordem estritamente crescente de distâncias a $(\sqrt{2}, 1/3)$. Assim, sendo d_i a distância do i-ésimo ponto P_i a $(\sqrt{2}, 1/3)$, a circunferência de centro $(\sqrt{2}, 1/3)$ e raio r, com $d_{2011} < r < d_{2012}$, possui exatamente 2011 pontos de coordenadas inteiras em seu interior.

Origem dos Problemas

1. Múltiplo de 9 com Algarismos Pares – *Olimpíada de Matemática do Reino Unido – Junior – 1989*

3. Calculadora Quebrada – *Problems to Solve in Middle School Mathematics – AMT.*

4. Loja em Quixajuba – *Problemas Olimpíada Matemática Argentina – volume 15. Red Olimpica. Buenos Aires.*

5. Números Sortudos – *Olimpíada Peruana de Matemática – 2007.*

7. Menor Soma Positiva – *Olimpíada Peruana de Matemática – 2007.*

8. Média dos Algarismos – *Adaptado da Olimpíada Ucraniana de Matemática – 2006.*

10. Estrelas em Geometrix – *Olimpíada Portuguesa de Matemática – 2011.*

11. Bandeira do Tio Mané – *Adaptado da XXII Olimpíada Portuguesa de Matemática – 2003.*

14. Azulejos de Pedro – *Adaptado dos* Maths Challenge for Young Australians – *Junior, 1994.*

15. Retângulo 9 x 4 – *Adaptado do* Maths Challenge for Young Australians – *Junior, 1996.*

17. Tangram – *Primary Mathematics World Contest – 2008.*

20. Construindo uma Pipa – *Olimpíada Portuguesa de Matemática – 2004.*

21. Colorindo Mapas – *Olimpíada Paulista de Matemática – 1986.*

22. De Coco da Selva a Quixajuba – *Primary Mathematics World Contest.*

23. O Baralho de João – *Primary Mathematics World Contest – 2006.*

25. Distribuindo Maçãs – *Primary Mathematics World Contest.*

26. Maria e seus Convidados – *Banco de Problemas da Olimpíada de Matemática do Cone Sul – 1998.*

27. Cartões de Apostas – *Olimpíada Rioplatense de Matemática –*

30. Herança para Cinco Filhos – *Olimpíada de Matemática de Moscou – Fase Distrital – 2001.*

31. Vizinhos e Distantes – *Olimpíada de Leningrado – 1988.*

32. Truque com Cartas – *Torneio Internacional das Cidades – 2007.*

33. Campeonato de Quixajuba – *Adaptado da "Gauss Contest" (Canadá) – 1999.*

34. Tabuleiro 6 x 6 – *Olimpíada de Moscou 2011.*

36. Contando Quadrados – *Adaptado da "Gauss Contest" (Canadá) – 2000.*

39. Dividindo um Retângulo – *Adaptado da Olimpíada de Matemática de Leningrado – 1990.*

40. Números no Tabuleiro 4 x 4 – *Torneio Internacional das Cidades.*

46. Quantas Frações! – *Torneio Internacional das Cidades.*

51. Colar de Ouro – *Olimpíada Búlgara de Matemática.*

52. AP x BN – *EduCabri – Clase 7 – Olimpíada Matemática Argentina.*

55. Bissetrizes – *Olimpíada Matemática Argentina – 2007.*

56. Ângulos e Ângulos! – *Olimpíada Peruana de Matemática – 2007.*

57. Quadrado, Pentágono e Icoságono – *UK Junior Math Olympiad – 2010.*

58. Eneágono Regular – *The Constest Problem Book IV – The Mathematical Association of America. Adaptado do Problema 30 do Exame de 1977.*

62. Comparando Sequências – *Olimpíada de Matemática de Leningrado – 1998.*

64. Esqueleto do Cubo – *Problems to Solve in Middle School. AMT.*

65. Placas das Bicicletas – *Olimpíadas Colombianas de Matemática – 1999.*

66. Torneio de Tênis – *O problema relacionado é da OBMEP 2009, primeira fase.*

68. Produto 2000 – *Olimpíada Peruana de Matemática – 2007.*

69. Tabuleiro 123 x 123 – *Olimpíada Peruana de Matemática – 2005.*

70. Números no W – *Problemas Olimpíada Matemática Argentina – volume 15*

71. Montando Tabelas – *Olimpíada Paulista de Matemática – 2010.*

73. Corrida de São Paulo a Fortaleza – *Olimpíada Matemática Rioplatense*

74. Casas Pretas e Brancas – *Olimpíada Alagoana de Matemática – 2007.*

75. Ora Bolas! – *Torneio Internacional das Cidades.*

76. Distância entre os Vilarejos – *Círculos Matemáticos – A Experiência Russa. IMPA – 2010.*

77. Amigos que você pode Contar! – *Adaptado da Olimpíada Rioplatense de Matemática – 1997.*

79. Contando Polígonos – *Olimpíada Rioplatense de Matemática – 1998.*

80. Desafiando os Amigos! – *O problema relacionado é da "Gauss Contest" (Canadá) – 2009.*

81. Sequência Numérica II – *Olimpíada Peruana de Matemática – 2007. O problema relacionado é da OBMEP 2007, segunda fase, nível 3.*

87. Sistema com 7 Variáveis – *A parte (b) é da AIME – 1989.*

89. Maior Divisor Ímpar – *Torneio Internacional das Cidades.*

92. Subconjuntos com Soma Grande – *Olimpíada Peruana de Matemática – 2004.*

96. Aparando um Poliedro – *Torneio Internacional das Cidades.*

97. Bolas Azuis e Vermelhas – *O problema relacionado Torneio de Xadrez é da Olimpíada Brasileira de Matemática – 1992.*

98. Dez Pontos no Plano – *AIME*

101. Triângulo 20 – 40 – 120 – *Adaptado do Canguru Sem Fronteiras – 2009.*

104. Triângulo Isósceles II – *Problemas 19 – Olimpíada Matemática Argentina.*

106. Mais Circunferências Tangentes – *O problema relacionado é da Olimpíada Brasileira de Matemática 2003, primeira fase, nível 3.*

110. Pés das Perpendiculares – *Competição entre a Áustria e a Polônia.*

111. Jogo Triangulário – *Olimpíada Espanhola de Matemática – 1999.*

113. Frações Irredutíveis – *Olimpíada Russa de Matemática – 2009.*

115. Comendo Pizzas – *Olimpíada Espanhola de Matemática – 2000.*

116. Quatro Cores no Tabuleiro – *Desafio da Real Sociedad Matemática Española.*

118. Formigas Geométricas! – *EduCabri – Clase 7 – Olimpíada Matemática Argentina.*

119. Ponto no Interior do Quadrado – *O problema relacionado é da Olimpíada Iberoamericana de Matemática – 1995.*

+ Desafios

Nível 1

121. (Soma 91) A soma de treze inteiros positivos distintos é igual a 92. Determine estes números.

122. (Formando um Quadrado) Mostre como formar um quadrado utilizando quatro figuras idênticas à mostrada na figura abaixo.

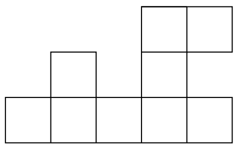


Figura 122.1

123. (Outro Tabuleiro 6 x 6) Pinte de preto seis casas de um tabuleiro branco 6×6, de tal modo que não seja possível cortar um retângulo branco 1×6 ou um quadrado branco 3×3.

124. (Moeda Falsa) Temos 9 moedas, uma das quais é falsa (ela é mais leve do que as outras). Encontre a moeda falsa utilizando duas pesagens em uma balança de pratos.

125. (Castelos do Rei) O rei pretende construir seis castelos em seu reino e ligar dois quaisquer deles por uma estrada. Faça um diagrama dos castelos e das estradas de modo que elas se cruzem ao todo três vezes e exatamente duas estradas passem em cada cruzamento.

126. (Quadrado Perfeito?) A soma dos algarismos de um número é igual a 2010. Este número pode ser um quadrado perfeito?

127. (Batalha Naval) O campo do jogo *Batalha Naval* é um tabuleiro 10×10, o qual contém um "navio" oculto no formato de um retângulo 1×3. É sempre possível acertar o navio com até 33 tentativas?

128. (Sequência Numérica III) O primeiro termo de uma sequência é 439 e cada termo, a partir do segundo, é igual à soma dos algarismos do termo anterior, multiplicada por 13. Qual é o 100^{o} termo desta sequência?

129. (Polígono Legal) Um polígono é *legal* se seus vértices estão sobre uma grade retangular de pontos e cada um de seus lados é horizontal ou vertical. A distância entre dois pontos vizinhos da grade é 1 cm. Por exemplo, o polígono da figura seguinte é legal.

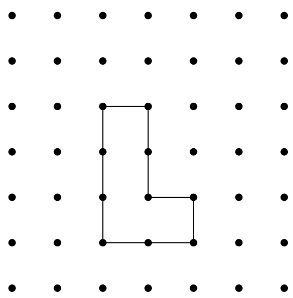


Figura 129.1

(a) Existe um polígono legal com perímetro igual a 22 cm e área igual a 14 cm^2? Em caso afirmativo, mostre um exemplo e caso contrário justifique.

(b) Existe um polígono legal com perímetro igual a 21 cm e área igual a 14 cm^2? Em caso afirmativo, mostre um exemplo e caso contrário justifique.

130. (Soma dos Algarismos)

(a) Existem dois números naturais consecutivos tais que as somas de seus algarismos são ambas divisíveis por 7?

(b) Existem dois números naturais consecutivos tais que as somas de seus algarismos são ambas divisíveis por 9?

Em ambos os casos, se a resposta for afirmativa, dê um exemplo. Se a resposta for negativa, justifique.

Nível 2

131. (Dobrando uma folha) Cristiane dobrou uma folha retangular de papel de tal modo que um vértice coincidiu com o ponto médio de um lado, como indicado na figura 131.1. Ela descobriu que os triângulos I e II são iguais.

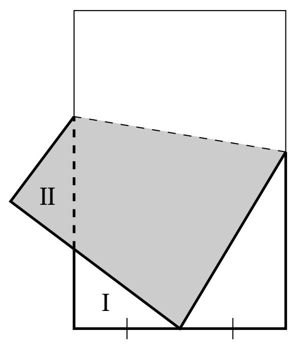


Figura 131.1

Determine a medida do maior lado da folha, sabendo que o lado mais curto mede 8 cm.

132. (Pedro e Paulo) Pedro nasceu no século 19, enquanto seu irmão Paulo nasceu no século 20. Certa vez os irmãos se encontraram em uma festa comemorando o aniversário de ambos. Pedro disse, "Minha idade é igual à soma dos dígitos do meu ano de nascimento". "A minha também", respondeu Paulo. Quantos anos Paulo é mais jovem que Pedro?

133. (Sequência Numérica IV) Uma sequência numérica é formada de acordo com a seguinte regra: o primeiro número é 7 e cada número, a partir do segundo, é igual a soma dos dígitos do quadrado do número anterior, aumentada em uma unidade. Por exemplo, o segundo número é 14, porque $7^2 = 49$ e $4 + 9 + 1 = 14$. O terceiro número é 17 e assim por diante. Qual o milésimo número da sequência?

134. (Números na Estrela) Escreva um dos números de 1 a 12 em cada um dos doze triângulos equiláteros pequenos da figura de modo que, em cada triângulo equilátero formado por quatro triângulos pequenos, a soma dos números escritos seja igual a 20.

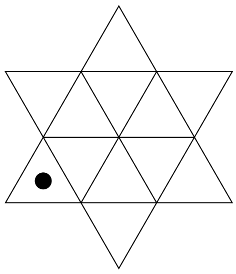


Figura 134.1

135. (Contando de 1 a 1000) Sete estudantes contam de 1 a 1000 como segue:

- André diz todos os números, com exceção do número do meio em cada grupo de três números consecutivos. Isto é, André diz 1, 3, 4, 6, 7, 9, ..., 997, 999, 1000.
- Bruno diz todos os números que André não disse, exceto que ele também salta o número do meio em cada grupo de três números consecutivos.
- Clara diz todos os números que André e Bruno não disseram, exceto que ele também salta o número do meio em cada grupo de três números consecutivos.
- Daniel, Estevão e Fábio dizem todos os números que nenhum dos estudantes com o primeiro nome começando antes do seu no alfabeto disseram, exceto que eles também saltam o número do meio em cada grupos de três números consecutivos.
- Finalmente, Gabriel diz o único número que ninguém disse.

Que número Gabriel disse?

136. (Equipe de Natação) O treinador da equipe de natação decidiu organizar uma série de competições entre os 7 integrantes da equipe. Em cada dia será realizado uma única prova com a participação de três nadadores. Cada nadador competirá exatamente uma vez com cada um dos outros.

(a) Quantos dias durará esta série de competições? Explique ou justifique por que não pode durar nem mais dias, nem menos dias que o número afirmado.

(b) Mostre uma possível distribuição indicando os três nadadores que competem em cada dia.

137. (Repartindo o Tesouro) A lei pirata estabelece que para repartir as moedas de um tesouro o capitão deve escolher um grupo de piratas e repartir igualmente as moedas entre estes até que não possua moedas suficientes para dar uma a mais a cada pirata. As moedas que sobram são a parte do capitão.

O capitão Morgan deve repartir um tesouro que contém menos de 1000 moedas de ouro. Ele sabe que se escolhe 99 piratas ficará com 51 moedas e se escolhe 77 piratas caberão a ele apenas 29 moedas. Determinar quantos piratas deve escolher Morgan para ficar com a maior quantidade de moedas, e para essa quantidade de piratas, quantas moedas ele ganhará. Observação: cada pirata escolhido deve receber pelo menos uma moeda.

138. (Verificando Moedas) Você possui 6 moedas de pesos 1, 2, 3, 4, 5 e 6 gramas que parecem iguais, exceto por seus rótulos que indicam o respectivo peso de cada uma. Como determinar se todas as indicações dos rótulos estão corretas, usando uma balança de pratos somente duas vezes?

139. (Bissetriz no Triângulo Retângulo) O ponto K é marcado sobre a hipotenusa AB do triângulo retângulo ABC de modo que $CK = BC$. O segmento CK divide a bissetriz interna AL em dois segmentos de mesma medida (L é um ponto do lado BC). Determine as medidas dos ângulos do triângulo ABC.

140. (Somando Ângulos) Em uma folha quadriculada marcamos os pontos A, B, C, D, M e N, como mostra a figura 140.1.

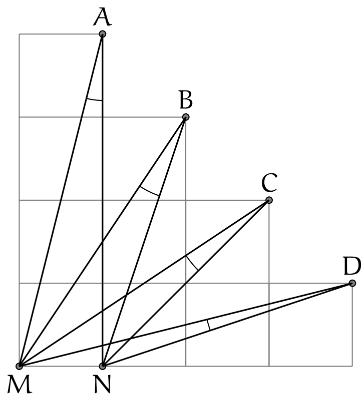


Figura 140.1

Prove que a soma dos ângulos $M\hat{A}N$, $M\hat{B}N$, $M\hat{C}N$ e $M\hat{D}N$ é igual a $45°$.

Nível 3

141. (Sistema em Três Variáveis) Encontre todas as ternas (x, y, z) de números reais que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} x(x+y+z) = 26 \\ y(x+y+z) = 27 \\ z(x+y+z) = 28. \end{cases}$$

142. (Equilibrando Quadrados) Seguem alguns exemplos nos quais a soma dos quadrados de k números positivos consecutivos é igual à soma dos quadrados dos $k-1$ inteiros seguintes:

$$3^2+4^2=5^2,$$
$$36^2+37^2+38^2+39^2+40^2=41^2+42^2+43^2+44^2,$$
$$55^2+56^2+57^2+58^2+59^2+60^2=61^2+62^2+63^2+64^2+65^2.$$

Encontre uma fórmula geral para todos os casos.

143. (Triângulo 30 – 60 – 90) O triângulo retângulo ABC tem ângulo reto em C e o ângulo A mede 30°. O centro da circunferência inscrita no triângulo é ponto I e D é o ponto de interseção desta circunferência com o segmento BI. Prove que os segmentos AI e CD são perpendiculares.

144. (Poligonal no Quadrado) No quadrado $ABCD$, a linha poligonal $KLAMN$ é tal que os ângulos $K\hat{L}A$, $L\hat{A}M$ e $A\hat{M}N$ medem 45°.

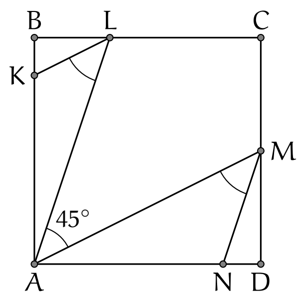


Figura 144.1

Demonstre que $KL^2+AM^2=AL^2+MN^2$.

145. (Dividindo em Áreas Iguais) Considere os pontos M e N sobre os lados BC e CD do quadrado $ABCD$, tais que o ângulo $M\hat{A}N$ mede 45°.

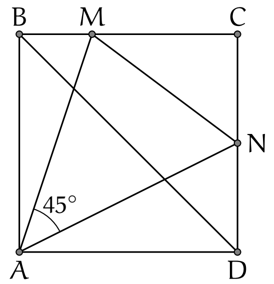


Figura 145.1

Prove que a diagonal BD divide o triângulo AMN em duas partes de mesma área.

146. (Cortando um Hexágono) Existe um hexágono que pode ser dividido em quatro triângulos congruentes por um único corte reto?

147. (Truque com Cartas II) Duas pessoas realizam um truque. A primeira retira 5 cartas de um baralho de 52 cartas (previamente embaralhado por um membro da plateia), olha-as, e coloca-as em uma linha da esquerda para a direita: uma com a face para baixo (não necessariamente a primeira), e as outras com a face para cima. A segunda pessoa deve adivinhar a carta que está com a face para baixo. Prove que elas podem combinar um sistema que sempre torna isto possível.

148. (Bissetrizes) No triângulo ABC, o ângulo B mede $60°$. Traçamos as bissetrizes AD e CE, sendo D um ponto do lado BC e E um ponto do lado AB. As bissetrizes intersectam-se no ponto I. Prove que $ID = IE$.

149. (Ministros) Um país tem 12 ministros. Cada ministro é amigo de 5 ministros e inimigo dos outros 6. Cada comitê é formado por 3 ministros. Um comitê é considerado *legítimo* se todos os seus membros são amigos ou se todos são inimigos. Quantos comitês legítimos podem ser formados?

150. (Você sabe? Então eu também sei!) Uma professora de matemática pensou em um inteiro positivo de dois algarismos. Ela deseja que seus dois inteligentes alunos Daniela e Adriano determinem o valor exato do número pensado.

Para tal, informa reservadamente a Daniela a quantidade de divisores positivos do número e confidencia a Adriano a soma dos algarismos do número.

Uma breve conversa entre Daniela e Adriano é transcrita abaixo:

- **Adriano**: Eu não posso determinar o número.
- **Daniela**: Nem eu, mas posso dizer se ele é par ou ímpar.
- **Adriano**: Agora eu sei qual é o número.
- **Daniela**: Você sabe? Então eu também sei.

Suponha que os estudantes são honestos e existe lógica perfeita em tudo o que falaram. Determine o número pensado pela professora justificando sua resposta.