

Padrões nas Progressões Aritméticas

Gostaria de apresentar outra solução para a questão de número 13, do banco de questões 2012; e que também aparece na questão 17 da OBMEP de 2007 – Nível 3 (1ª fase).

Questão 13. Paula escreveu os números 1, 2, 3, ... em uma folha de papel quadriculado de acordo com o padrão indicado abaixo. Os números que aparecem ao longo da flecha formam a sequência 1, 3, 13, 31, Qual é o 30º termo dessa sequência?

Observando a sequência dos números **1, 3, 13, 31, 57, ...**, percebemos o seguinte padrão:

$$1 \xrightarrow{+2} 3 \xrightarrow{+10} 13 \xrightarrow{+18} 31 \xrightarrow{+26} 57$$

Notemos ainda que, a sequência (2, 10, 18, 26) é uma Progressão Aritmética de razão 8, cujo termo geral, a_n , é dado por: $a_n = 2 + (n-1) \cdot 8 = 8n - 6$.

Dessa forma, a partir do padrão representado acima, observamos que:

$$1 \xrightarrow{+(8 \cdot 1 - 6)} 3 \xrightarrow{+(8 \cdot 2 - 6)} 13 \xrightarrow{+(8 \cdot 3 - 6)} 31 \xrightarrow{+(8 \cdot 4 - 6)} 57 \dots \xrightarrow{[8 \cdot (n-2) - 6]} f_{n-1} \xrightarrow{[8 \cdot (n-1) - 6]} f_n$$

Assim, podemos notar dois fatos interessantes:

1º) Cada termo da sequência pode ser determinado a partir de seu termo anterior, pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} f_1 = 1 \\ f_{n+1} = f_n + (8n - 6) \end{cases}$$

2º) Cada termo da sequência pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} f_1 &= 1 \\ f_2 &= 3 = 1 + (8 \cdot 1 - 6) \\ f_3 &= 13 = 1 + (8 \cdot 1 - 6) + (8 \cdot 2 - 6) \\ f_4 &= 31 = 1 + (8 \cdot 1 - 6) + (8 \cdot 2 - 6) + (8 \cdot 3 - 6) \\ f_5 &= 57 = 1 + (8 \cdot 1 - 6) + (8 \cdot 2 - 6) + (8 \cdot 3 - 6) + (8 \cdot 4 - 6) \\ &\vdots \\ f_n &= 1 + \underbrace{(8 \cdot 1 - 6) + (8 \cdot 2 - 6) + (8 \cdot 3 - 6) + (8 \cdot 4 - 6) + \dots + [8 \cdot (n-1) - 6]}_S \end{aligned}$$

A soma indicada por S , representa a soma dos termos de uma PA de razão 8, de $(n-1)$ termos, em que: $a_1 = 2$, $a_n = 8 \cdot (n-1) - 6$. Escrevendo essa soma de trás para frente,

$$S = [8 \cdot (n-1) - 6] + [8 \cdot (n-2) - 6] + [8 \cdot (n-3) - 6] + \dots + (8 \cdot 3 - 6) + (8 \cdot 2 - 6) + (8 \cdot 1 - 6)$$

Daí,

$$2 \cdot S = (8n - 12) \cdot (n-1) \therefore$$

$$S = (4n - 6) \cdot (n-1)$$

Logo, a referida sequência, tem por lei de formação:

$$f_n = (4n - 6) \cdot (n-1) + 1, \text{ ou simplesmente, } f_n = 4n^2 - 10n + 7.$$

Assim, calculamos facilmente f_{30} :

$$f_{30} = 4 \cdot 30^2 - 10 \cdot 30 + 7 = 3.307 \text{ (ALTERNATIVA C)}.$$

Observação

Poderíamos ter determinado a soma S , aplicando a fórmula da soma dos termos de uma

Progressão Aritmética, $S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$:

$$S = \frac{(2 + 8n - 14) \cdot (n - 1)}{2} = \frac{(8n - 12) \cdot (n - 1)}{2}, \text{ ou seja, } S = (4n - 6) \cdot (n - 1).$$

FIM!